ตรรกศาสตร์

1.1 ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ คือวิชาที่ว่าด้วยการให้เหตุผลและหาข้อสรุป เราเรียกประโยคหรือข้อความที่ให้ค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งว่า **"ประพจน์" (proposition)**

ค่าความจริงประจำประพจน์(**truth value**) หมายถึง ค่าความจริงที่เป็นจริง(**true-T**)หรือเท็จ(**false-F**)อย่างใดอย่างหนึ่งของประพจน์นั้นๆ

ตัวอย่างเช่น

สงขลาเป็นจังหวัดหนึ่งทางตอนใต้ของประเทศไทย เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็น

เชียงใหม่เป็นจังหวัดหนึ่งของภาคกลางตอนบน เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็น

แม่น้ำเจ้าพระยาเป็นแม่น้ำสายหลักของประเทศ เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็น

อย่าเดินลัดสนาม ไม่เป็นประพจน์

- ตอนนี้เป็นเวลากี่นาฬิกา ไม่เป็นประพจน์
- พรุ่งนี้เป็นวันจันทร์ ไม่เป็นประพจน์

1.2 การดำเนินการบนตรรกศาสตร์

ตัวดำเนินการหรือตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ แบ่งเป็น

1. ***ตัวดำเนินการเดี่ยว*** (unary operator) เป็นตัวดำเนินการซึ่งต้องการประพจน์เดียวในการถูกดำเนินการ ตัวอย่างเช่น ให้ประพจน์ **p** มีค่าความจริงเป็นเท็จ ประพจน์ $\sim p$ ให้ค่าความจริงเป็นจริง

2. ***ตัวดำเนินการคู่*** (binary operator) เป็นตัวดำเนินการซึ่งต้องการประพจน์อย่างน้อยสองประพจน์ในการถูกดำเนินการ ตัวดำเนินการคู่ มีดังนี้

2.1 "**และ**" (conjunction) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\wedge$ เช่น ประพจน์ $p \wedge q$

2.2 "**หรือ**" (disjucntion) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vee$ เช่น ประพจน์ $p \vee q$

2.3 "**ถ้า** ....**แล้ว**....." (implication) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\rightarrow$ เช่น ประพจน์ p $\rightarrow$ q

2.4 "....**ก็ต่อเมื่อ**...." (biconditional) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ เช่น ประพจน์ p $\leftrightarrow$ q

2.5 " ...XOR...." (Exclusive-OR) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\oplus$ เช่น ประพจน์ p $\oplus$ q

ตารางค่าแสดงความจริงสำหรับประพจน์ p **และ** q **ที่มีค่าความจริงดังรายละเอียดในตาราง**

p	**q**	**p∧q**	**p∨q**	**p→q**	**p↔q**	**p⊕q**
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

หมายเหตุ หากมีประพจน์เดี่ยว **n** ประพจน์ กรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นได้ $\mathbf{2^n}$ กรณี

1.3 ประพจน์ประกอบ

ประพจน์ประกอบ (**compound proposition**) เกิดจากการเชื่อมประพจน์เดี่ยว (**atomic proposition**) หลายประพจน์ผ่านตัวเชื่อมที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ค่าความจริงของประพจน์ประกอบเกิดจากผลลัพธ์ของค่าความจริงของประพจน์เดี่ยวที่ผ่านตัวดำเนินการนั้นๆ

ตัวอย่าง จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $\sim(\sim p \vee \sim q)$

วิธีทำ

p	**q**	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

1.4 การสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (logical equivalence)

ประพจน์ประกอบ **p** สมมูลกับประพจน์ประกอบ **q** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ " **p** $\Leftrightarrow$**q** " ก็ต่อเมื่อประพจน์ประกอบ **p** $\leftrightarrow$ **q** ให้ค่าความจริงเป็นจริงเสมอ หรือ สัจนิรันดร์ (**tautology**) สำหรับทุกค่าความจริงใดๆของประพจน์ประกอบ **p** และ **q** หรือพูดอีกนัยหนึ่งว่าประพจน์ประกอบ **p** และประพจน์ประกอบ **q** มีค่าความจริงเดียวกัน (เป็นจริงเหมือนกัน หรือ เป็นเท็จเหมือนกัน)

ประพจน์ที่เป็น**สัจนิรันดร์** (**tautology**) คือประพจน์ที่ให้ค่าความจริงเป็นจริงในทุกกรณี

ประพจน์ที่เป็น **ข้อขัดแย้ง (contradiction)** คือ ประพจน์ที่ให้ค่าความจริงเป็นเท็จในทุกกรณี

กฎที่สำคัญทางตรรกศาสตร์ สำหรับประพจน์ **p, q** และ **r** ใดๆ

ชื่อกฎ	Rules	ความหมาย
เอกลักษณ์	Identity	$p \leftrightarrow p$
นิเสธสองชั้น	Double Negation	$p \leftrightarrow \sim(\sim p)$
นิรมัชฌิม	Excluded Middle	$p \vee \sim p$
ข้อขัดแย้ง	Contradiction	$\sim(p \wedge \sim p)$
นิจพล	Idempotent	$(p \wedge p) \leftrightarrow p$ $(p \vee p) \leftrightarrow p$
การบวก	Addition	$p \rightarrow (p \vee q)$
การสมมูล	Equivalence	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \oplus q)$
การแย้งสลับที่	Contraposition	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
ตรรกบทแบบสมมติฐาน	Hypothetical Syllogism	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
การสลับที่	Commutative Laws	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$, $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
การเปลี่ยนหมู่	Associative Laws	$[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$

		$[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
กฎการแจกแจง	Distributive Laws	$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
การดูดซึม	Absorption Laws	$[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$ $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$
เดอมอร์แกน	De Morgan's Laws	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
การมีเงื่อนไข	Implication	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$
นิเสธของการมีเงื่อนไข	Negation for Implication	$\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

หมายเหตุ $p \oplus q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$ $\quad$ $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

1.5 การพิสูจน์ทางตรรกะ

การพิสูจน์ทางตรรกะ สามารถแสดงได้ 2 วิธี คือ

1. การแสดงโดยแจกแจงตารางค่าความจริง
2. การแสดงโดยใช้กฎทางตรรกกะ

1.5.1 <u>*การแสดงโดยแจกแจงตารางค่าความจริง*</u>

ตัวอย่าง จงพิสูจน์การสมมูลของประพจน์ประกอบต่อไปนี้โดยการแจกแจงตารางค่าความจริง

$\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$

วิธีทำ

p	**q**	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \wedge q$	$\sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow p \wedge q$
T	T						

T	F						
F	T						
F	F						

ดังนั้น $\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$

1.5.2 *การแสดงโดยใช้กฎทางตรรกกะ*

ตัวอย่าง จงพิสูจน์การสมมูลของประพจน์ประกอบต่อไปนี้โดยการใช้กฎทางตรรกกะ

$\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$

วิธีทำ

$\sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow$ Negation และ De Morgan's Laws

$\Leftrightarrow$ Double Negation

ตัวอย่าง $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \oplus r) \Leftrightarrow \sim p \vee q \vee \sim r$

วิธีทำ

$(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \oplus r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

1.6 ประโยคเปิด

ประโยคเปิด หมายถึง ประพจน์ที่ยังไม่อาจสรุปได้ว่ามีค่าประจำประพจน์เป็นค่าใด จนกว่าตัวแปรจะได้รับการระบุที่ที่ชัดเจน

ตัวอย่าง ข้อความ **"x+6 = 6 "** เป็นประโยคเปิด

เรียก **x** ว่า ตัวแปร (**variable**)

ถ้า **x = 0** ข้อความดังกล่าวจะให้ค่าความจริงเป็น

ถ้า **x** แทนค่าอื่นๆ ข้อความดังกล่าวจะให้ค่าความจริงเป็น

แทนประโยคเปิดที่มี ***x,y,z,...*** เป็นตัวแปรด้วย **P(*x*),*P*(*y*),*P*(*z*),...**ตามลำดับ

ประโยคเปิดจะเป็นประพจน์เมื่อแทนค่าตัวแปรนั้นด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ (**universal set**)

ตัวอย่าง เมื่อกำหนด **U = {-1, 0, 1}** และประโยคเปิด **x+1 = 2**

แทน **x = -1** จะได้ **x+1 = 2** เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น

แทน **x=0** จะได้ **x+1 = 2** เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น

แทน **x=1** จะได้ **x+1 = 2** เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น

ในทางตรรกศาสตร์ มี**ตัวบ่งปริมาณ**(**quantifier**) **2** ประเภท คือ

- **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (for all)** หรือ ทุกสิ่ง ใช้สัญลักษณ์ $\forall$
- **ตัวบ่งปริมาณบางตัว(for some)** หรือ มีอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง ใช้สัญลักษณ์ $\exists$

จากตัวอย่างข้างต้น ประพจน์ $\forall x \in U$, **[x+1=2]** ให้ค่าความจริงเป็น

ขณะที่ ประพจน์ $\exists x \in U, [x+1=2]$ ให้ค่าความจริงเป็น

1.7 ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหา

1. $\forall x \in \{3,4,5\}, [x < \pi]$ ให้ค่าความจริงเป็น

2. $\exists x \in \{3,4,5\}, [x < \pi]$ ให้ค่าความจริงเป็น

3. $\exists x \in \{-2-1,0\}, [x+2 < 0]$ ให้ค่าความจริงเป็น

4. $\forall x \in N, [x^3 < 0]$ ให้ค่าความจริงเป็น

5. $\exists x \in N, [x^3 > 0]$ ให้ค่าความจริงเป็น

6. $\forall x \in R, [x^2 + 1 > 0]$ ให้ค่าความจริงเป็น

7. $\exists x \in R, [x^2 + 1 = 0]$ ให้ค่าความจริงเป็น

ตัวอย่าง กำหนดประโยคเปิด **R(x,y) = " x** รัก **y "** จงเขียน ประพจน์ต่อไปนี้

$\forall x(\exists y\ R(x,y))$

$\exists y(\forall x\ R(x,y))$

$\exists x\ (\forall y\ R(x,y))$

$\forall y(\exists x\ R(x,y))$

$\forall x(\forall y\ R(x,y))$