การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.1 บทนำ

กระบวนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการแสดงการให้เหตุผลที่ถูกต้องตามหลักตรรกศาสตร์ในบรรทัด และระหว่างบรรทัดตลอดการพิสูจน์นั้น

2.2 กฎการอนุมานเชิงตรรกะ

กฎการอนุมานเชิงตรรกะ (**Rule of Logical Inference**) ถือเป็นแม่แบบพื้นฐานการพิสูจน์ที่ประกอบขึ้นจากความถูกต้องทางตรรกะของข้อสมมติฐานต่างๆแล้วนำสู่ข้อสรุปที่ถูกต้องอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่าง

กฎ Modus Ponens $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

จาก สมมติฐาน **p** และ **p → q** ที่เป็นจริง หมายความว่า

ประพจน์ **p** ให้ค่าความจริงที่เป็น จริง และ

ประพจน์ **p→q** ให้ค่าความจริงที่เป็นจริง

นั่นคือ ประพจน์ **q** ย่อมให้ค่าความจริงที่เป็นจริง

ดังนั้น จากเหตุแห่งสมมติฐาน **[p ∧ (p→q)]** ที่เป็นจริง จึงสมเหตุสมผลที่จะสรุปว่าประพจน์ **q** ให้ค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้กฎ **Modus Ponens**

"ถ้าคุณมีรหัสผ่านตู้ **ATM** ที่ถูกต้องแล้ว คุณสามารถกดเงินจากตู้ **ATM** ได้"

"นายแดงได้รับบัตร**ATM** พร้อมรหัสผ่าน"

ดังนั้นสรุปได้ว่า

ตัวอย่าง

กฎ **Modus Tollens** $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$

จากสมมติฐาน $\sim q$ และ $p \rightarrow q$ ที่เป็นจริง หมายความว่า

ประพจน์ $\sim q$ ให้ค่าความจริงที่เป็นจริง และ

ประพจน์ $p \rightarrow q$ ให้ค่าความจริงที่เป็นจริง

เนื่องด้วย ประพจน์ $p \rightarrow q$ สมมูลเชิงตรรกะกับประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$

นั่นหมายความว่าประพจน์ $\sim q \rightarrow \sim p$ ให้ค่าความจริงเป็นจริงเช่นกัน

และจาก กฎการอนุมาน **Modus Pollens** ซึ่งประกอบด้วย สมมติฐาน $[\sim q \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)]$

จึงสมเหตุผลที่จะสรุปว่าประพจน์ $\sim p$ ให้ค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้น จากเหตุแห่งสมมติฐาน$[\sim q \wedge (p \rightarrow q)]$ ที่เป็นจริง จึงสมเหตุสมผลที่จะสรุปได้ว่า $\sim p$ เป็นจริง

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้กฎ **Modus Tollens**

"ถ้าคุณมีรหัสผ่านตู้ **ATM** ที่ถูกต้องแล้ว คุณสามารถกดเงินจากตู้ **ATM** ได้"

"แดงกดเงินจากตู้ **ATM** ไม่ได้"

ดังนั้น สรุปได้ว่า

2.3 การกล่าวอ้างที่เป็นจริง

ตารางกฎการอนุมาน			
Modus Pollens	p $p \rightarrow q$ $\therefore \quad q$ $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	**Modus Tollens**	$\sim q$ $p \rightarrow q$ $\therefore \quad \sim p$ $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$
Hypothetical syllogism	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore \quad p \rightarrow r$ $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	**Disjunctive syllogism**	$p \vee q$ $\sim p$ $\therefore \quad q$ $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$
Addition	p $\therefore \quad p \vee q$ $p \rightarrow (p \vee q)$	**Simplification**	$p \wedge q$ $\therefore \quad p$ $[p \wedge q] \rightarrow p$
Conjunction	p q $\therefore \quad p \wedge q$ $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$	**Resolution**	$p \vee q$ $\sim p \vee r$ $\therefore \quad q \vee r$ $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$

ตัวอย่าง

“ถ้าคุณส่งเมล์ถึงฉันแล้ว ฉันจะเขียนโปรแกรมสำเร็จ” “ถ้าคุณไม่ส่งเมล์ถึงฉัน ฉันจะเข้านอนหัวค่ำ” “ถ้าฉันเข้านอนหัวค่ำ ฉันตื่นมาจะรู้สึกสดชื่น” สรุปได้ว่า “ถ้าฉันจะเขียนโปรแกรมไม่สำเร็จ แล้วฉันตื่นมาจะรู้สึกสดชื่น” สมเหตุสมผลหรือไม่ **วิธีทำ**

2.4 การกล่าวอ้างและข้อสรุปที่เกี่ยวกับตัวบ่งปริมาณ

Universal instantiation	$\dfrac{\forall x\, P(x)}{\therefore \quad P(c)}$	Universal generalization	$\dfrac{P(s)}{\therefore \quad \forall x\, P(x)}$
Existential instantiation	$\dfrac{\exists x\, P(x)}{\therefore \quad P(c)}$	Existential generalization	$\dfrac{P(c)}{\therefore \quad \exists x\, P(x)}$

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้ **Universal instantiation**

"ผู้ชายทุกคนแข็งแกร่ง"

ดังนั้น สรุปได้ว่า

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้ **Universal generalization**

กำหนดให้ **S** แทนเซตของนักศึกษาในห้องนี้

"นักศึกษา **s** กำลังเรียนวิชา **Discrete Maths"**

ดังนั้น สรุปได้ว่า

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้ **Existential instantiation**

"มีปลาอยู่ในทะเล"

ดังนั้น

ตัวอย่าง

การประยุกต์ใช้ **Existential generalization**

"ญาดาอยู่ในบ้าน"

ดังนั้น สรุปได้ว่า

ตัวอย่าง

"นักศึกษาในห้องนี้ทุกคนเรียนหลักสูตรวิทยการคอมพิวเตอร์"

"นริศราเป็นนักศึกษาในห้องนี้"

ดังนั้น สรุปได้ว่า "นริศราเรียนหลักสูตรวิทยาการคอมพิวเตอร์"

1. $\forall$x (C(x)$\rightarrow$ S(x))

2. C(Ali)$\rightarrow$ S(Ali)

3. C(Ali)

4. S(Ali)

ตัวอย่าง

“นักศึกษาบางคนหากเขาเข้าใจวิธีการโปรแกรมแล้ว เขาสามารถเขียนภาษาจาวาได้”

“นักศึกษาทุกคนเข้าใจวิธีการโปรแกรม”

ดังนั้น สรุปได้ว่า “มีนักศึกษาที่สามารถเขียนภาษาจาวาหรือภาษาซีได้”

1. $\exists$x (P(x) $\rightarrow$ J(x))

2. P(a) $\rightarrow$ J(a)

3. $\forall$x P(x)

4. P(a)

5. J(a)

6. J(a) $\vee$ C(a)

7. $\exists$x (J(x) $\vee$ C(x))