เซต

3.1 บทนำ

เซต หมายถึง กลุ่มของสิ่งของที่ทราบได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดไม่อยู่ในกลุ่ม

ตัวอย่าง เซตของนักศึกษาในห้องเรียนนี้

เราเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า “สมาชิก” (Element) ใช้สัญลักษณ์ $\in$ แทนเป็นสมาชิกของ และ $\notin$ แทนไม่เป็นสมาชิกของ

การเขียนเซต เซตมีวิธีการเขียน 2 แบบ คือ

1. **แบบแจกแจงสมาชิก** เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมาย วงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว กรณีสมาชิกมีมาก ๆ จะใช้สัญลักษณ์ “...” แทนสมาชิกตัวอื่นๆ

   ตัวอย่างเช่น

   A เป็นเซตของจำนวนคู่บวกที่น้อยกว่า 100 จะเขียน A = { 2 , 4 , 6 , ... , 98 }

   B เป็นเซตของจำนวนเต็มคี่ จะเขียน B = {..., -5 , -3 , -1 ,1 , 3 , 5 , ... }

2. **แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต** เขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต ประกอบด้วยวงเล็บปีกกา และใช้ตัวแปรแทนสมาชิกของเซต โดยบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกไว้หลังเครื่องหมาย ” | ” (โดยที่)

   ตัวอย่างเช่น

   A เป็นเซตของตัวประกอบของ 6 จะเขียน A = {x | x เป็นตัวประกอบของ 6 }

   B เป็นเซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ จะเขียน B = { x | x เป็นวันในหนึ่งสัปดาห์ }

3.2 นิยามของเซต

3.2.1 เซตที่เท่ากัน

บทนิยาม เซต A เท่ากับเซต B ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองเซตมีสมาชิกเหมือนกัน นั่นคือ สมาชิกทุกตัวของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และสมาชิกทุกตัวของเซต B เป็นสมาชิกของเซต A

เซต **A** เท่ากับเซต **B** เขียนแทนด้วย **A = B**

เซต **A** ไม่เท่ากับเซต **B** เขียนแทนด้วย **A** $\neq$ **B** แสดงว่ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต **A** ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต **B** หรือ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต **B** ที่ไม่ใช่สมาชิกของเซต **A**

3.2.2 เอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม เอกภพสัมพัทธ์ **(U)** คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะไม่กล่าวถึงสิ่งใด นอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้นนี้

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนเซตของจำนวน

I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก หรือ $I^+ = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots \}$

I^- แทนเซตของจำนวนเต็มลบ หรือ $I^- = \{ -1 , -2 , -3 , -4 , \ldots \}$

I^0 แทนเซตของจำนวนเต็มศูนย์ หรือ $I^0 = \{ 0 \}$

I หรือ Z แทนเซตของจำนวนเต็ม หรือ $I = \{ 0 , -1 , 1 , -2 , 2 , \ldots \}$ หรือ

$I = \{ \ldots , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , \ldots \}$

N แทนเซตของจำนวนนับ หรือ $N = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots \}$ นั่นคือ $I^+ = N$

P แทนเซตของจำนวนเฉพาะที่เป็นบวก หรือ $P = \{ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , \ldots \}$

Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

Q' เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ

R เป็นเซตของจำนวนจริง

3.2.3 ***เซตกำจัด (Finite Set)*** คือ เซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรือศูนย์ จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วย n(A) หรือ |A|

|A| วัดจากจำนวนสมาชิกที่แตกต่างกันในเซต A

ตัวอย่าง $|\varnothing| =$, $|\{1,2,3\}| =$, $|\{a, b\}| =$, $|\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}| =$

3.2.4 ***เซตอนันต์ (*** **Infinite Set*)*** คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

เซตว่าง (Empty Set or null set) คือ เซตจำกัดที่ไม่มีสมาชิกหรือจำนวนสมาชิกเป็นศูนย์ แทนด้วย { } หรือ $\varnothing$

3.2.5 ***เซตที่เทียบเท่ากัน (Equivalent sets)***

บทนิยาม เซต **A** และ เซต **B** เป็นเซตที่เทียบเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เซต **A** และ เซต **B** มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

ตัวอย่าง A = { 1 , 2 , 3 } ; B = { a , b , c } เซต **A** และเซต **B** เป็นเซตที่เทียบเท่ากัน เขียนแทนด้วย $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$

3.2.6 *สับเซต (Subsets)*

บทนิยาม เซต **A** เป็นสับเซตของเซต **B** ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต **A** เป็นสมาชิกของเซต **B**

เซต **A** เป็นสับเซตของเซต **B** เขียนแทนด้วย $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$

เซต **A** ไม่เป็นสับเซตของเซต **B** ถ้ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของเซต **A** ที่ไม่เป็นสมาชิกของเซต **B** เขียนแทนด้วย $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$

หมายเหตุ **A** เป็นสับเซตแท้ของเซต **B** ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต **A** เป็นสมาชิกของเซต **B** แต่เซต $\mathbf{A} \neq$ เซต **B**

3.2.7 ***ซุปเปอร์เซต (Super Sets)***

บทนิยาม เซต **A** เป็นซุปเปอร์เซตของเซต **B** ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของเซต **B** เป็นสมาชิกของเซต **A**

เขียนแทนด้วย $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{B}$ และ $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$

หมายเหตุ

1. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง
   ถ้า **A** เป็นเซตใด ๆ แล้ว $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}$
2. เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต
   ถ้า **A** เป็นเซตใด ๆ แล้ว $\varnothing \subset \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ และ $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{A} = \mathbf{B}$
4. เรียกสับเซตทุก ๆ สับเซตนอกจากเซตของตัวเอง ว่าสับเซตแท้

3.2.8 *เพาเวอร์เซต (Power sets)*

เพาเวอร์เซต คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ **A** เมื่อ **A** เป็นเซตจำกัด เพาเวอร์เซตของ **A** เขียนแทนด้วย **P(A)**

สมบัติของเพาเวอร์เซต

ให้ **A , B** เป็นเซตใด ๆ

1. $\emptyset \in P(A)$

2. $A \in P(A)$

3. ถ้า **A** เป็นเซตจำกัดและ $n(A) = k$ แล้ว **P(A)** เป็นเซตจำกัดและ $n(P(A)) = 2^k$

4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$

5. ถ้า $P(A) \subset P(B)$ แล้ว $A \subset B$

6. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

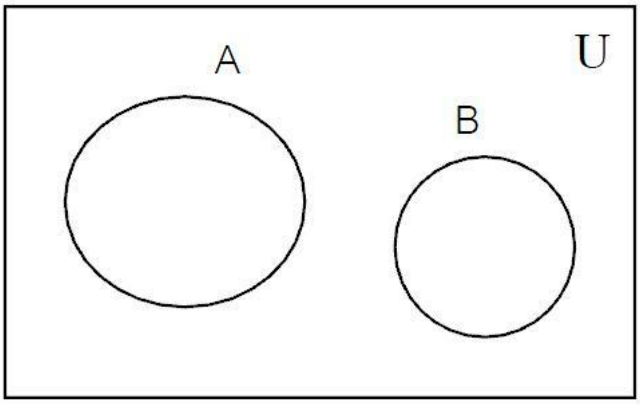
7. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

หมายเหตุ $\forall S: |P(S)| > |S|$, e.g. $|P(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$

3.3 แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ (Venn – Euler Diagrams)

แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ นิยมแทนเอกภพสัมพัทธ์ **U** ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และใช้รูปปิดใดๆ แทนเซตซึ่งเป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์นั้น

ตัวอย่าง



รูปที่ 1.1 แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ที่แสดงเซต **A** และ เซต **B** ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

เซต **A** และ เซต **B** ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ซึ่งเรียกว่า **Disjoint set**

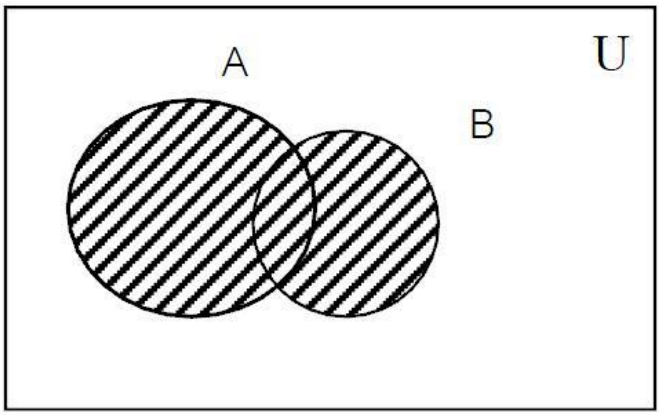
3.4 การดำเนินการบนเซต

3.4.1 ***ยูเนียน (Union)*** ยูเนียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย A $\cup$ B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ A หรือของ B หรือ ของทั้งสองเซต

เขียน **A $\cup$ B** แบบบอกเงื่อนไขดังนี้

A $\cup$ B = { **x $\in$ U** | **x $\in$ A** หรือ **x $\in$ B** หรือ **x** เป็นสมาชิกของทั้งสองเซต }

ตัวอย่างแผนภาพของยูเนียน เช่น



รูปที่ 1.2 แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ที่แสดงเซต **A $\cup$ B**

การดำเนินการ ยูเนียน ของเซต **n** เซตใดๆ สามารถเขียน ในรูป

$$\bigcup_1^n A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A_i = \{i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots\ \}$

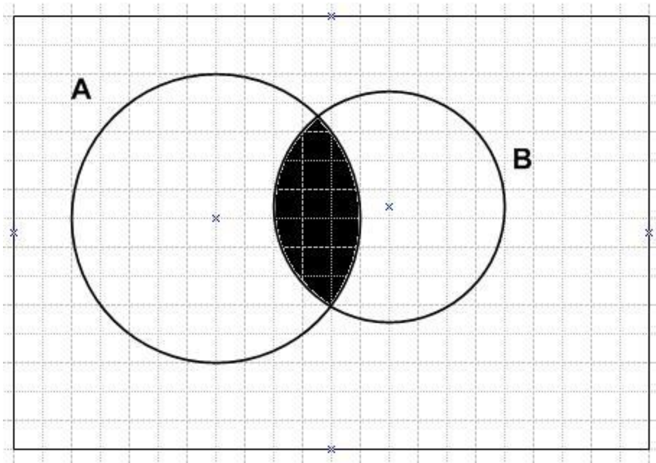
จงหา $\bigcup_1^n A$

วิธีทำ

3.4.2 *อินเตอร์เซกชัน (Intersection)* อินเตอร์เซกชันของเซต **A** และเซต **B** เขียนแทนด้วย **A ∩ B** คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต **A** และเซต **B**

เขียน **A ∩ B** แบบบอกเงื่อนไข ดังนี้

$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A$ **และ** $x \in B \}$



รูปที่ **1.3** แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ที่แสดงเซต **A** $\cap$ **B**

การดำเนินการ อินเตอร์เซกชัน ของเซต **n** เซตใดๆ สามารถเขียน ในรูป

$$\bigcap_1^n A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $A_i = \{i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots\ \}$

จงหา $\bigcap_1^n A$

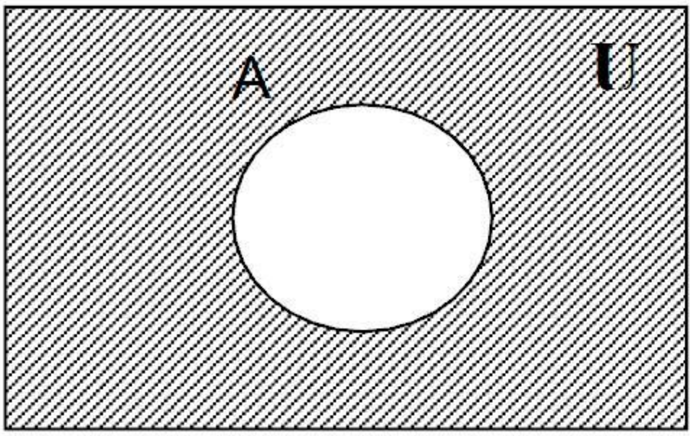
3.4.3 ***คอมพลีเมนต์ (Complement)*** คอมพลีเมนต์ของเซต **A** เขียนแทนด้วย $\mathbf{A'}$ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของ **U** แต่ไม่เป็นสมาชิกของ **A**

เขียน **A** แบบบอกเงื่อนไข ดังนี้

$A' = \{ x \in U \mid x \notin A \}$

ตัวอย่าง

แผนภาพของคอมพลีเมนต์



รูปที่ **1.4** แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ที่แสดงเซต **A′** **(**บริเวณแรงเงา**)**

3.4.4 ***ผลต่าง (Difference or relative complement)*** ผลต่างของเซต **A** กับเซต **B** เขียนแทนด้วย **A− B** คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต **A** ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต **B**

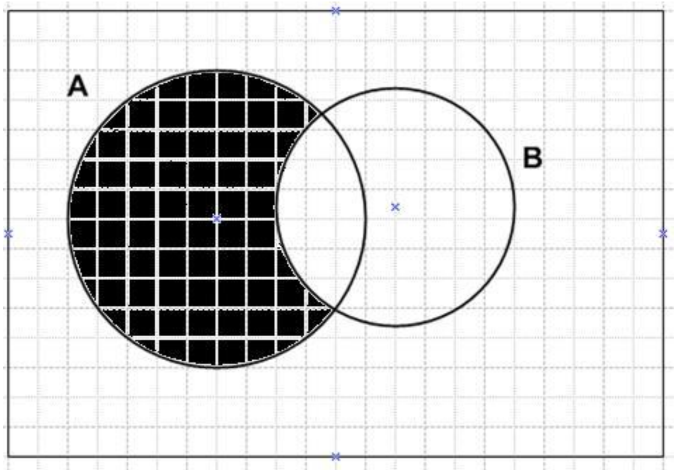
ผลต่างของเซต **A** กับเซต **B** เขียนแทนด้วย **A - B**

เขียน แบบบอกเงื่อนไข ดังนี้

$A - B = \{x \in U \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$

ตัวอย่าง

แผนภาพของผลต่าง



รูปที่ **1.5** แผนภาพของเวนน์ –ออยเลอร์ที่แสดงเซต **A − B**

3.5 สมบัติที่สำคัญของเซต

กำหนดให้ **A, B, C** เป็นเซตใดๆ

3.5.1 $A \cup B = B \cup A$ (Commutative Law)

3.5.2 $A \cap B = B \cap A$ (Commutative Law)

3.5.3 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Associative Law)

3.5.4 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Associative Law)

3.5.5 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributive Law)

3.5.6 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributive Law)

3.5.7 $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (De Morgan's Law)

3.5.8 $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan Law)

3.5.9 $(A')' = A$

3.5.10 $U' = \phi$

3.5.11 $\phi' = U$

3.5.12 $A - B = A \cap B'$

3.5.13 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

3.5.14 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

3.**5.15** ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว $A - B = A$

3.6 การพิสูจน์ทางเซต

การพิสูจย์การเท่ากันของเซต สามารถแสดงได้ 3 วิธี

3.6.1 การแสดงว่าเซตทั้งสองเป็นสับเซตของกันและกัน

3.6.**2** การแสดงโดยแจกแจงการเป็นสมาชิกโดยใช้ตาราง

3.6.**3** การแสดงโดยใช้คุณสมบัติของเซต

3.6.1 ***การแสดงว่าเซตทั้งสองเป็นสับเซตของกันและกัน***

ตัวอย่าง

จงแสดงการพิสูจน์ว่า $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

วิธีทำ

กรณีที่ 1 จะแสดงว่า $\mathbf{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

ดังนั้น $\mathbf{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

กรณีที่ 2 จะแสดงว่า $\mathbf{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)}$

ดังนั้น $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

จาก กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 สรุปได้ว่า $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.6.2 ***การแสดงโดยแจกแจงการเป็นสมาชิกโดยใช้ตาราง***

ตัวอย่าง จงแสดงการพิสูจน์ว่า **$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$**

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1					
1	**1**	**0**					
1	**0**	**1**					
1	**0**	**0**					
0	**1**	**1**					
0	**1**	**0**					
0	**0**	**1**					
0	**0**	**0**					

3.6.3 ***การแสดงโดยใช้คุณสมบัติของเซต***

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ จากคุนสมบัติ Distributive Law

ตัวอย่างโจทย์และการแก้ปัญหา

หมายเหตุ **สูตรที่ควรรู้เกี่ยวกับเซต**

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ เมื่อ A, B เป็น disjoint set
2. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ เมื่อ A, B มีสมาชิกร่วมกัน
3. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
4. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
5. $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
6. $n(A') = n(U) - n(A)$

ตัวอย่าง

ผู้สำรวจประชามติ ได้สอบถามผู้มีสิทธิออกเสียง 35 คน พบว่า 14 คนสนับสนุนผู้สมัครคนที่ 1 และ 26 คนสนับสนุนผู้สมัครคนที่ 2 จะมีกี่เสียงที่สนับสนุนผู้สมัครทั้งสองคน

วิธีทำ

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $n(U) = 32$, $n(A) = 15$, $n(B) = 18$ **และ** $n(A \cup B)' = 2$ จงหา $n(A \cap B)$

วิธีทำ