การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

6.1 วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การแสดงการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์เป็นการให้เหตุผลที่ประจักษ์โดยปราศจากการโต้แย้ง เพื่อแสดงว่าข้อความหรือทฤษฎีนั้นเป็นจริง

การพิสูจน์ ตั้งอยู่บนสมมติฐาน (**premise/hypothesis/assumption**) สัจพจน์(**axiom**) บทนิยาม (**definition**) ซึ่งล้วนเป็นประพจน์ที่ได้รับการยอมรับหรืออนุมาน (**inference**) ได้ว่าเป็นจริง กระบวนการพิสูจน์มีรูปแบบการนำไปสู่ข้อสรุปหรือผล ซึ่งมีเหตุมาจาก สมมติฐานหรือเหตุผ่านหลักการอนุมาน (**rule of intference**)

ชนิดของการพิสูจน์ ข้อความ “p implies q”

Type of Proof	**How to show**	
Direct Proof of p implies q	**Assume p is true. Derive a chain of implications which ends with q.**	**Assume p** **Want to show q** **Proof …**
Indirect(Contrapositive) Proof of p implies q	**Prove ∼q implies ∼p with direct proof**	**Assume ∼q** **Want to show ∼p** **Proof ….**
Proof by Contradiction of p implies q	**Do a direct proof of (p∧∼q) implies false, that is, implies contradiction.**	**Assume p ∧∼q** **Want to show contradiction** **Proof …**

6.1.1 Direct Proofs

ตัวอย่าง

สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < x(x-1)$

วิธีทำ

6.1.2 Indirect Proofs

ตัวอย่าง

สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง

สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < x(x-1)$

วิธีทำ

6.1.3 Contradiction Proofs

ตัวอย่าง

สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง สำหรับจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x < 0$ แล้ว $x < x(x-1)$

วิธีทำ

6.2 ลำดับ และ อนุกรม

ลำดับ ประกอบขึ้นเป็นเซตที่มีสมาชิกที่ได้รับการจัดเรียง ลำดับเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนที่เป็นสับเซตของจำนวนเต็ม ($z \subseteq Z$)ไปยังเซตเรนจ์ **S**

a_n แทนสมาชิกในลำดับที่ **n** ขณะที่ { a_n } แทนเซตของลำดับซึ่งประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของลำดับนั้น

หมายเหตุ ลำดับเริ่มต้นที่ **1**

ตัวอย่าง

$a_n = 3n$

{ a_n } = เป็น **Arithmetic Sequence**

$a_n = 2^n$

{ a_n } = เป็น **Geometric Sequence**

$a_n = n^2$

{ a_n } =

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence) คือ ลำดับที่มีผลต่างระหว่าง **2** พจน์ใดๆที่ติดกันเป็นจำนวนคงที่ **d {a, a+d , a+2d, a+3d, …}**

ลำดับเรขาคณิต (Geometric Sequence) คือ ลำดับที่มีสัดส่วนระหว่าง **2** พจน์ใดๆที่ติดกันเป็นจำนวนคงที่ **{a, ar , ar^2, ar^3, …}**

ลำดับ Fibonacci Sequence คือ ลำดับที่มีค่าเท่ากับผลบวกของ **2** พจน์ก่อนหน้า

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ **{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …}**

อนุกรม คือ ผลรวมของลำดับ ตั้งแต่พจน์ที่ **m** ถึง พจน์ที่ **n**

$$\mathrm{a}_{\mathrm{m}} + \mathrm{a}_{\mathrm{m+1}} + \mathrm{a}_{\mathrm{m+2}} + \ldots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}} = \sum_{j=m}^{n} a_j$$

เมื่อเขียนเป็นส่วนหนึ่งของโปรแกรมได้ดังนี้

```
int sum = 0;

for (j = m; j ≤ n; j++)

sum = sum + a[j];
```

ตัวอย่าง

$$\sum_{j=1}^{5} j = \sum_{j=0}^{4} (j+1) =$$

$$\sum_{j=1}^{5} 1/j =$$

กฎการคูณและการบวกที่ประยุกต์ใช้กับอนุกรม

$$c\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} cj =$$

$$r\sum_{j=0}^{n} ar^{j} = \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1} = \sum_{k=1}^{n+1} ar^{k} = ar^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} ar^{k} = ar^{n+1} - a + \sum_{k=0}^{n} ar^{k}$$

Telescoping Sum

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) =$$

ตัวอย่าง

จงหา $\sum_{k=1}^{4}(k^2 - (k-1)^2)$

$$\sum_{k=1}^{4}(k^2 - (k-1)^2) =$$

ตัวอย่าง

จงหา $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij =$$

ผลเฉลยรูปแบบปิดของอนุกรม *(Closed Form Solutions)* หมายถึงการหาคำตอบของปัญหาโดยส่งผ่านตัวแปรใดหนึ่งเพื่อหาคำตอบของฟังก์ชันและได้คำตอบของปัญหาในทันที โดยไม่จำเป็นต้องดำเนินการตามขั้นตอนตั้งแต่ต้นจนกระทั่งสิ้นสุด

ตัวอย่าง จงหา ผลเฉลยรูปแบบปิดของอนุกรม $\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) =$$

ดังนั้น ผลเฉลยรูปแบบปิดของอนุกรม $\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) = n^2$

นั่นคือ เมื่อ **n = 4** คำตอบของ $\sum_{k=1}^{4}(k^2-(k-1)^2) =$

หมายเหตุ ผลเฉลยรูปแบบปิดของอนุกรมที่ควรทราบ

$$\sum_{j=0}^{n} j = 0+1+\ldots+n = n(n+1)/2$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = 0^2+1^2+\ldots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}, r \neq 1$$

6.3 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

ให้ $P(n)$ แทน ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ $n \geq m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$

การพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ $n \geq m$ ต้องแสดง **2** ขั้นตอนดังนี้

ขั้นพื้นฐาน (Basic Step) แสดงให้ได้ว่า $P(m)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย (Inductive Step) ให้ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq m$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง แสดงให้ได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ

$$\mathbf{1+3+5+\ldots+(2}n\mathbf{-1)}=n^{2}$$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

จะได้

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ

$n^{2} > 3n$ **เมื่อ** $n \geq 4$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

จะได้

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ

$$\frac{1}{1\bullet 2}+\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\ldots+\frac{1}{n\bullet(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **ทุก** n $\in \mathrm{N}$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย จะได้

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ

$2^{n} \geq n^{2}$ เมื่อ **n ≥ 4**

วิธีทำ

ให้ **P(n)** แทนข้อความ $2^{n} \geq n^{2}$ สำหรับ **n ≥ 4**

ขั้นพื้นฐาน n = 4 $\mathbf{2^{4} \geq 4^{2}}$

ดังนั้น **P(4)** เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $k \in \mathbf{N}$ โดยที่ $k \geq 4$ สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง

จะได้ $\mathbf{2^{k} \geq k^{2}}$

เพราะว่า $\mathbf{2^{k+1} = 2\bullet 2^{k} \geq 2 \bullet k^{2} = k^{2}+k\bullet k \geq k^{2}+4\bullet k \geq k^{2}+2\bullet k +1 = (k+1)^{2}}$

ดังนั้น **P(k+1)** เป็นจริง

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ

$\mathbf{3^{n} < n!}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $\mathbf{n > 6}$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

จะได้

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ **$2 \mid (n+1)(n+4)$** สำหรับทุกจำนวนนับ **n**

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

จะได้

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ $\mathbf{11 \mid [8(10^{2n}) + 6(10^{2n-1}) + 9]}$ สำหรับทุกจำนวนนับ **n**

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

จะได้

นั่นหมายความว่า

เพราะว่า

นั่นคือ

ดังนั้น

หมายเหตุ การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น เป็น **Weak Induction** คือพิจารณาเงื่อนไขเบื้องต้นและพิสูจน์สมมุติฐานอุปนัย $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$

สำหรับ **Strong Induction** จะพิสูจน์ว่าช่วงปิดของค่าในเงื่อนไขเริ่มต้นจนถึงค่า k มีสมมุติฐานอุปนัยเป็นจริงทุกค่านั่นคือ $\forall k$ ($P(r)$ เป็นจริงสำหรับค่า r ทุกตัว และ $(1 \leq r \leq k) \rightarrow P(k+1)$ หรือ $(P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)$

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ มีจำนวนเฉพาะที่หาร **n** ลง**ตัว**

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

นั่นคือ

พิจารณา จำนวนนับ **k+1**

หาก จำนวนนับ **k+1** เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น

หาก จำนวนนับ **k+1** เป็นจำนวนประกอบ

นั่นคือ

จึงสรุปได้ว่า

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงพิสูจน์ข้อความ $\mathbf{a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $\mathbf{k \geq 3}$ แล้ว $\mathbf{a_n \leq 2^n}$ สำหรับทุก $\mathbf{n \geq 0}$ เมื่อกำหนด $\mathbf{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3}$

วิธีทำ

ให้ **P(n)** แทนข้อความ

ขั้นพื้นฐาน

ดังนั้น

ขั้นอุปนัย

นั่นคือ

ดังนั้น

6.4 การเวียนบังเกิด

การเวียนบังเกิด เป็นกระบวนการเรียกตนเองเพื่อบังเกิดผลลัพธ์ใดหนึ่ง เนื่องด้วยบางครั้งการนิยามสิ่งใดสิ่งหนึ่งเป็นเรื่องยาก จึงใช้กระบวนการเวียนบังเกิดเพื่อนิยามสิ่งนั้น

ตัวอย่าง

ลำดับ 1, 2, 4, 8, 16, 32, …

การนิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิด เพื่อนิยามลำดับข้างต้น

$A_1 = 1$ **และ** $A_{n+1} = 2A_n$

นั่นคือ

A2 = 2(1) = 2

A3 = 2(2) = 4

A4 = 2(4) = 8

…

หากลำดับได้รับการนิยามในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิด สามารถพิสูจน์ข้อความที่นิยามโดยใช้หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์

กำหนดให้ P(k) **แทนประพจน์ ลำดับที่** a_k

ขั้นพื้นฐาน

แสดงว่า P(1) **เป็นจริง**

ขั้นอุปนัย

แสดงว่า $\forall$ k$\geq$ **1** (P(k) $\rightarrow$P(k+1))

ตัวอย่าง

กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิด

f(0) = 3

f(n+1) = 2f(n) + 2 สำหรับ $\forall$**n** $>$ 0

จงหา **f(1), f(2)** และ **f(3)**

วิธีทำ

f(1) =

f(2)

f(3) =

ตัวอย่าง

จงนิยามความสัมพันธ์เวียนเกิด ของ factorial function F(n) = n!

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ขั้นอุปนัย

F(5) = 5F(4)

= 5 4 F(3)

= 5 4 3 F(2)

= 5 4 3 2 F(1)

= 5 4 3 2 1 F(0) = 5 4 3 2 1 1 = 120

การนิยามฟังก์ชันเวียนเกิด สำหรับทุกจำนวนเต็มบวกใดๆ ค่าของฟังก์ชันเวียนเกิดจะต้อง **well-defined (**ให้ค่าถูกต้องชัดเจน**)**

ตัวอย่าง

จงนิยามฟังก์ชันเวียนเกิด ของ **an** เมื่อ **a** แทน จำนวนจริงใดๆ และ $\mathbf{a \neq 0}$ และ **n** แทน จำนวนเต็มใดๆที่มากกว่า หรือเท่ากับ **0**

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ขั้นอุปนัย

ตัวอย่าง จงนิยามฟังก์ชันเวียนเกิด ของ $\sum_{k=0}^{n} a_k$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ขั้นอุปนัย

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชันเวียนเกิด

$f(0) = 2 \quad f(1) = 3$

$f(n+2) = 2f(n) + f(n+1) + 5 \ \forall n \geq 0$

จงหา f(2) , f(3) และ f(4)

วิธีทำ

ตัวอย่าง

จำนวน **Fibonacci Number** คือ จำนวนที่ได้รับการกำหนด ดังนี้

$F(0) = 0$

$F(1) = 1$

$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ สำหรับ $n = 2,3,4,\ldots$

จงหา F(4)

วิธีทำ

การนิยามฟังก์ชันเวียนเกิดเพื่อนิยามเซต

สมมติให้ S แทนเซต

ขั้นพื้นฐาน

กำหนดสมาชิกเริ่มต้น

ขั้นอุปนัย

กำหนดกฎในการได้มาซึ่งสมาชิกตัวถัดไป

ตัวอย่าง

จงนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดของสับเซต $S \subseteq Z$

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ขั้นอุปนัย

ดังนั้น

ตัวอย่าง

จงใช้ **Mathematical Induction** เพื่อแสดงว่า เซต **S = { x | x = 3n** เมื่อ **n** $\in \mathbb{N}$ **}**

วิธีทำ

ขั้นพื้นฐาน

ขั้นอุปนัย

นั่นคือ

ดังนั้น

การนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดของเซตของ string

ขั้นพื้นฐาน

$\lambda \in \Sigma^*$ (λ **หมายถึง** string ที่ไม่มี symbol ใดๆ)

ขั้นอุปนัย

ถ้า $w \in \Sigma^*$ **และ** $x \in \Sigma$ แล้ว $wx \in \Sigma$

ตัวอย่าง

$\Sigma = \{0, 1\}$ **และ** $\lambda \in \Sigma*$

วิธีทำ

การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด มี **2** วิธี

1. ***การทำซ้ำ***

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{\mathbf{S_n}\}$ เมื่อ

$S_n = 2S_{n-1}$ **เมื่อ** $n \geq 1$ **และ** $S_0 = 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $\{\mathbf{H_n}\}$ เมื่อ

เมื่อกำหนด $H_n = 2H_{n-1} + 1$ เมื่อ $H_1 = 1$

วิธีทำ

2. การหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธ์เชิงเส้น

นิยาม ความสัมพันธ์เวียนเกิดเอกพันธ์เอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว คือ

ความสัมพันธ์เวียนเกิด ในรูป

$$\mathbf{a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}} \text{ เมื่อ } \mathbf{c_1, c_2, \ldots, c_k} \text{ เป็นค่าคงตัว } \mathbf{c_k \neq 0}$$

ทฤษฎีบทที่ *1* ให้ $\mathbf{c_1, c_2}$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\mathbf{r^2 - c_1r - c_2}$ มีผลเฉลยที่แตกต่างกัน $\mathbf{r_1, r_2}$ ตามลำดับ $\mathbf{\{b_n\}}$ จะเป็นผลเฉลย ของความสัมพันธ์เวียนเกิด $\mathbf{a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{b_n = d_1r_1^n + d_2r_2^n}$ ทุก $\mathbf{n}$ โดยที่ $\mathbf{d_1, d_2}$ เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบทที่ **2** ให้ $\mathbf{c_1, c_2}$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\mathbf{r^2 - c_1r - c_2}$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว $\mathbf{r_0, r_0}$ ตามลำดับ $\mathbf{\{b_n\}}$ จะเป็นผลเฉลย ของความสัมพันธ์เวียนเกิด $\mathbf{a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{b_n = d_1r_0^n + d_2nr_0^n}$ ทุก $\mathbf{n}$ โดยที่ $\mathbf{d_1, d_2}$ เป็นค่าคงที่

ทฤษฎีบทที่ *3* ให้ $\mathbf{c_1, c_{2,\ldots,}c_k}$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\mathbf{r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_k}$ มีผลเฉลยที่แตกต่างกันหมด $\mathbf{k}$ ผลเฉลย $\mathbf{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ ตามลำดับ $\mathbf{\{b_n\}}$ จะเป็นผลเฉลย ของความสัมพันธ์เวียนเกิด $\mathbf{a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}}$ ก็ต่อเมื่อ $\mathbf{b_n = d_1r_1^n + d_2r_2^n + \ldots + d_kr_k^n}$ ทุก $\mathbf{n}$ โดยที่ $\mathbf{d_1, d_2, \ldots,, d_k}$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$\mathbf{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}} \text{ สำหรับทุก } \mathbf{n > 1} \text{ และ } \mathbf{a_0 = 0\ a_1 = 3}$$

วิธีทำ จาก ทฤษฎีบทที่ **1** $\mathbf{c_1 = 2}$ และ $\mathbf{c_2 = -1}$

ผลเฉลยของ $\mathbf{r^2 - c_1r - c_2}$ = มีค่าเป็น $\mathbf{r_0}$ =

$\mathbf{a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}} \Leftrightarrow$

ดังนั้น

นั่นคือ

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ เมื่อ } a_0 = 2 \ a_1 = 7$$

วิธีทำ ผลเฉลยของ $r^2 - c_1 r - c_2 =$ มีค่าเป็น $r_1 =$ และ $r_2 =$

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \leftrightarrow$

ดังนั้น

นั่นคือ

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ เมื่อ } a_0 = 1 \ a_1 = 6$$

วิธีทำ ผลเฉลยของ $r^2 - c_1 r - c_2 =$ มีค่าเป็น $r_0 =$ และ $r_0 =$

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} \leftrightarrow$

ดังนั้น

นั่นคือ

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของความสมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \text{ เมื่อ } a_0 = 2\ a_1 = 5\ \ a_3 = 15$$

วิธีทำ ผลเฉลยของ $r^3 - c_1r^2 - c_2 r - c_3 \ =$ มีค่าเป็น $r_1 =$ $r_2 =$ และ $r_3 =$

$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + c_3a_{n-3} \leftrightarrow$

ดังนั้น

นั่นคือ

อัลกอลิทึมเวียนเกิด

พิจารณาส่วนของโปรแกรมต่อไปนี้

```
int  x(int n)

{ int  m = 0;

  n = n + m +1;

  return n;}
```

และส่วนของโปรแกรม

```
int x(int n)

{ int m = 1;

  n = x(n);

return m+n;}
```

ฟังก์ชันที่เรียกใช้ตัวเองถูกเรียนว่าฟังก์ชันเวียนบังเกิด ซึ่งจะพบการเรียกใช้ตัวเองภายในฟังก์ชัน

```
void test (int n)
{
  If (n > 0)
{ System.out.println(n);
  test(n-1);
  System.out.println(n);
}
}
```

จงหา ผลลัพธ์ ของคำสั่ง test(4) **และ** test(-4)

หมายเหตุ ฟังก์ชันเวียนเกิดเป็นฟังก์ชันที่เรียกใช้ตัวเอง จึงจำเป็นต้องป้องการการเกิดลูปไม่รู้จบโดยการกำหนดค่าคืนหนึ่งค่าเพื่อมิให้เรียกใช้ตัวเองซ้ำ

เปรียบเทียบการทำงานระหว่าง **Iterative Method** และ**Recursive Method**

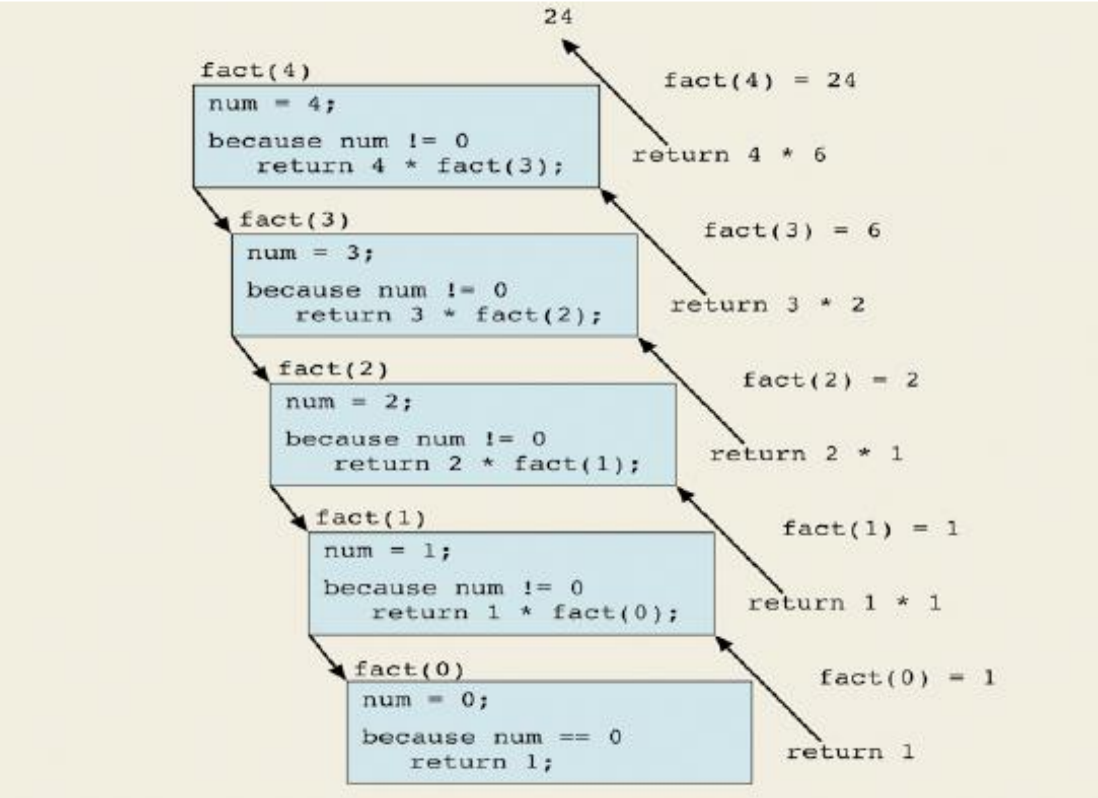
Iterative Method

```
public static int fact(int num) {
   int tmp = 1;
   for (int i = 1; i <= num; i++) {
      tmp *= i;
   }
   return tmp;
}
```

และ **Recursive Method**

```
public static int fact(int num)
{
     if (num == 0)
          return 1;
     else
          return num * fact(num - 1);
}
```

จงหาค่า **fact(4)** จากทั้งสองขั้นตอนวิธี



การแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่งสามารถทำได้หลายวิธี ดังตัวอย่างข้างต้น ที่สามารถแก้ปัญหาได้ทั้ง **iterative method** และ **recursive method** โดยมากวิธีการ **recursive**จะหาผลลัพธ์ได้ง่ายแต่ใช้เวลานานในการแก้ปัญหาเดียวกันเมื่อเทียบกับวิธี **iterative method**

การออกแบบขั้นตอนวิธีแก้ปัญหาแบบเวียนเกิด

การแก้ปัญหาเวียนเกิด ใช้หลักการแบ่งแยกปัญหาเป็นปัญหาที่ย่อยลงในต่ละขั้นแล้วทำการหาคำตอบปัญหาย่อยที่มีขนาดใหญ่ขึ้นเป็นลำดับ หลักการนี้รู้จักในชื่อ **“Divide and Conquer”** โดยหลักการออกแบบต้องหาคำตอบต่อไปนี้

1. ต้องลดขนาดของปัญหาลงอย่างไรให้คงลักษณะปัญหาเดิมไว้

2. การเรียกใช้งานแต่ละครั้งขนาดของปัญหาลดลงหรือไม่

3. ค่าคืนของปัญหาคือค่าใด

4. ปัญหาจะสิ้นสุดทุกครั้งเมื่อถึง **base case** หรือไม่