หลักการนับ (Principle of Counting)

7.1 กฎการบวก

กฎการบวก ถ้า งานที่หนึ่งมี $\mathbf{n_1}$ ทางเลือก งานที่สองมี $\mathbf{n_2}$ ทางเลือก และงานที่หนึ่งและงานที่สองเป็นอิสระต่อกัน จำนวนทางเลือกในการทำงานทั้งหมดมี $\mathbf{n_1 + n_2}$ ทางเลือก

จากกฎการบวกข้างต้นสามารถขยาย เป็นกฎการบวกรูปทั่วไป ดังนี้

ถ้ามีงานทั้งหมด **m** งาน $\mathbf{T_1, T_2, \ldots, T_m}$ และมีจำนวนทางเลือกเพื่อให้งานสำเร็จจำนวน $\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ ตามลำดับ อีกทั้งงานทั้งหมดเป็นอิสระต่อกัน จำนวนทางเลือกในการทำงานทั้งหมดมี

$$\mathbf{n_1 + n_2 + \ldots + n_m} \text{ วิธี}$$

หรือสำหรับเซต **m** เซตที่มีคุณสมบัติ **disjoint** กัน แต่ละเซตมีจำนวนสมาชิก $|\mathbf{A_1}| = \mathbf{n_1}$, $|\mathbf{A_2}| = \mathbf{n_2}, \ldots, |\mathbf{A_m}| = \mathbf{n_m}$ จำนวนสมาชิกทั้งหมดคือ

$$|\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup \ldots \cup \mathbf{A_m}| = |\mathbf{A_1}| \cup |\mathbf{A_2}| \cup \ldots \cup |\mathbf{A_m}| = \mathbf{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}$$

7.2 กฎการคูณ

กฎการคูณ งานหนึ่งงานสามารถแบ่งเป็นสองขั้นตอนย่อย ถ้างานย่อยที่หนึ่งมี $\mathbf{n_1}$ ทางเลือก งานย่อยที่สองมี $\mathbf{n_2}$ ทางเลือก แล้วจำนวนทางเลือกเพื่อดำเนินงานนี้ให้แล้วเสร็จมีทั้งสิ้น $\mathbf{n_1 X n_2}$ ทางเลือก

จากกฎการคูณข้างต้นสามารถขยายเป็นกฎการคูณรูปแบบทั่วไป ดังนี้

งานหนึ่งงาน หากสามารถแบ่งเป็น **m** งานย่อย $\mathbf{T_1, T_2, \ldots, T_m}$ และมีจำนวนทางเลือกเพื่อให้งานสำเร็จจำนวน $\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ ตามลำดับ จำนวนทางเลือกในการทำงานนี้ทั้งหมดมี

$n_1 X\ n_2 X \ldots X\ n_m$ วิธี

หรือ เขียนในรูปของเซต **m** เซต แต่ละเซตมีจำนวนสมาชิก $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2, \ldots, |A_m| = n_m$ จำนวนสมาชิกทั้งหมด $|A_1 X\ A_2 X \ldots X\ A_m| = |A_1| X\ |A_2| X \ldots X |A_m| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$

ตัวอย่าง

ระบบป้ายทะเบียนรถ กำหนดให้ ขึ้นต้นด้วยตัวเลข **1- 9** นำหน้าในตำแหน่งแรก และตำแหน่งที่ **2** และ **3** กำหนดเป็นตัวอักษรภาษาไทย (ก-ฮ) และตามด้วยชุดตัวเลข(**0-9**) อีกสี่ตำแหน่งจากระบบที่กำหนดจะรองรับจำนวนป้ายรถยนต์สูงสุดจำนวนกี่ป้าย

วิธีทำ งานหนึ่งงาน แบ่งเป็น **7** งานย่อย

$|T_1| =$, $|T_2| =$, $|T_3| =$, $|T_4| =$, $|T_5| =$, $|T_6| =$, $|T_7| =$

รองรับจำนวนป้ายรถยนต์สูงสุด จำนวน $|T_1| X\ |T_2| X |T_3| X\ |T_4| X\ |T_5| X\ |T_6| X\ |T_7|$

= ป้าย

ตัวอย่าง

ในตู้เสื้อผ้าของดวงใจ มีชุดเดรส อยู่ **6** ชุด เสื้อ **5** ตัว กระโปรง **6** ตัว และกางเกง **3** ตัว ดวงใจมีกี่ตัวเลือกในการแต่งตัวไปทำงาน

วิธีทำ จำนวนทางเลือกชุด เสื้อและกระโปรง คือ

จำนวนทางเลือกชุด เสื้อและกางเกง คือ

ดังนั้น ดวงใจมีตัวเลือกในการแต่งตัวทั้งหมด ทางเลือก

7.3 หลักการเพิ่มเข้า - ตัดออก (The Inclusion Exclusion Principle)

บางสถานการณ์บางส่วนของงานสองงานอาจเกิดขึ้นในเวลาเดียวกันจึงจำเป็นต้องหักส่วนที่เกิดซ้ำออก

งาน T_1 มีทางเลือกจากสมาชิกในเซต A_1 งาน T_2 มีทางเลือกจากสมาชิกในเซต A_2 และ

$|A_1 \cap A_2|$ คือจำนวนทางเลือกที่งานทั้งสองมีพร้อมกัน

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

ตัวอย่าง

จงหาจำนวนเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ **1 – 100** ที่หาร **5** หรือ **10** ลงตัว

วิธีทำ จำนวนเลขระหว่าง **1-100** ที่หาร **5** ลงตัว มีจำนวน จำนวน

จำนวนเลขระหว่าง **1-100** ที่หาร **10** ลงตัว มีจำนวน จำนวน

จำนวนเลขระหว่าง **1-100** ที่หาร **5** และ **10** ลงตัว มีจำนวน จำนวน

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$=$$

ดังนั้น จำนวนเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ **1 – 100** ที่หาร **5** หรือ **10** ลงตัว มี จำนวน

ตัวอย่าง

จงหาบิตสตริงขนาด **8** บิต ที่ขึ้นต้นบิตแรกด้วย หนึ่งหรือลงท้ายสองบิตสุดท้ายด้วยศูนย์

วิธีทำ จำนวนบิตสตริงขนาด **8** บิต ที่ขึ้นต้นบิตแรกด้วย หนึ่ง มีจำนวน

จำนวนบิตสตริงขนาด **8** บิต ที่ลงท้ายสองบิตสุดท้ายด้วยศูนย์ มีจำนวน

จำนวนบิตสตริงขนาด **8** บิต ที่ขึ้นต้นบิตแรกด้วย หนึ่งและลงท้ายสองบิตสุดท้ายด้วยศูนย์ มี จำนวน

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$=$$

ดังนั้น บิตสตริงขนาด **8** บิต ที่ขึ้นต้นบิตแรกด้วย หนึ่งหรือลงท้ายสองบิตสุดท้ายด้วยศูนย์ มีจำนวน จำนวน

7.4 หลักการรังนกพิราบ

หากจำนวนนกพิราบมากกว่าจำนวนรัง แน่นอนว่าจะมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัวปรากฏอยู่

หลักการรังนกพิราบ

ถ้ามีวัตถุจำนวน **k+1** ชิ้น หรือมากกว่าลงในกล่องจำนวน **k** กล่อง แล้วจะต้องมีกล่องอย่างน้อย หนึ่งกล่องที่มีวัตถุจำนวนมากกว่าหรือเท่ากับสอง ชิ้นบรรจุอยู่

หลักการรังนกพิราบทั่วไป

ถ้ามีวัตถุจำนวน **N** ชิ้น ลงในกล่องจำนวน **k** กล่อง แล้วจะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งกล่องที่บรรจุวัตถุ

อย่างน้อย $\lceil N/k \rceil$ ชิ้น

ตัวอย่าง

คนจำนวน **367** คน

สรุปได้ว่า **(1** ปี มี **366** วัน**)**

ตัวอย่าง

คำภาษาอังกฤษ **27** คำ

สรุปได้ว่า **(**พยัญชนะภาษาอังกฤษมี **26** ตัว**)**

ตัวอย่าง

กำหนดจำนวน **5** ช่องคิว จะต้องมีลูกค้าจำนวนกี่คนต่อชั่วโมงเป็นอย่างน้อย เพื่อรับประกันว่าบางช่องคิวจะให้บริการลูกค้าได้อย่างน้อย **11** คนต่อชั่วโมง

วิธีทำ จำนวนลูกค้า คือ

จำนวนกล่อง คือ

$\lceil N/5 \rceil =$

ดังนั้น จะต้องมีลูกค้าจำนวน **11** คนต่อชั่วโมงเป็นอย่างน้อย เพื่อรับประกันว่าบางช่องคิวจะให้บริการลูกค้าได้อย่างน้อย **11** คนต่อชั่วโมง

นั่นคือ **N** จะต้องมีลูกค้าจำนวน คนต่อชั่วโมงเป็นอย่างน้อย

ตัวอย่าง

ระบบหมายเลขโทรศัพท์ของประเทศหนึ่งถูกออกแบบให้มีรูปแบบ **AXX-XXX** เมื่อ **A** แทนตัวเลข **1-9** ขณะที่ **X** แทนตัวเลข **0-9** จะต้องออกแบบรหัสพื้นที่จำนวนที่หลัก เพื่อรองรับหมายเลขโทรศัพท์จำนวน **10** ล้านเลขหมาย

วิธีทำ

N คือ จำนวนหมายเลขโทรศัพท์ = เลขหมาย

K คือ จำนวนกล่อง =

$\lceil N/k \rceil = \lceil \quad \rceil = \lceil \quad \rceil =$

นั่นคือ ต้องการรหัสพื้นที่เพียง **2** หลักก็เพียงพอในการรองรับหมายเลขโทรศัพท์ระบบนี้

7.5 วิธีเรียงสับเปลี่ยนและ วิธีจัดหมู่ (Permutation and Combination)

วิธีการเรียงสับเปลี่ยน

ถ้ามีวัตถุ **n** ชิ้นที่แตกต่างกันและมีจำนวนเต็ม **r** ซึ่งมีค่า **1 ≤r≤ n** จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน **r** ลำดับของวัตถุ **n** ชิ้น จะเท่ากับ

$$\mathbf{P(n,r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ถ้ามีวัตถุ **n** ชิ้น แบ่งได้เป็นวัตถุชนิดที่ **1** จำนวน $\mathbf{n_1}$ ชิ้น เป็นวัตถุชนิดที่ **2** จำนวน $\mathbf{n_2}$ ชิ้น และเป็นวัตถุชนิดที่ **r** จำนวน $\mathbf{n_r}$ชิ้น โดยที่ $\mathbf{n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n}$ ชิ้น จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนวัถตุทั้ง **n** ชิ้น จะเท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1! n_1! \ldots n_r!}$$

ตัวอย่าง

พิพิธภัณฑ์ แห่งหนึ่งมีภาพวาดฝาผนังจำนวน **20** ชิ้น จะคัดเลือกมาแสดงจำนวน **8** ชิ้น จะมีวิธีการจัดเรียงบนฝาผนังให้แตกต่างกันได้ทั้หมดกี่วิธี

วิธีทำ

n คือ จำนวนภาพวาดฝาผนัง = ชิ้น

r คือ จำนวนภาพวาดฝาผนังที่ถูกคัดเลือกมา = ชิ้น

$$\mathbf{P(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!} = \quad = \quad = \quad \text{วิธี}$$

ดังนั้น มีวิธีการจัดเรียงบนฝาผนังให้แตกต่างกันได้ทั้หมด วิธี

ตัวอย่าง

จงหาจำนวนทางในการสลับคำว่า **"MATHS"** โดยเลือกมาเพียง **3** ตัวอักษร

วิธีทำ

n คือ จำนวนตัวอักษรทั้งหมด **5** ตัว

r คือ จำนวนตัวอักษรที่เลือกมา **3** ตัว

P(n,r) = $\frac{n!}{(n-r)!}$ = = = วิธี

ดังนั้น มีจำนวนทางในการสลับ วิธี

ตัวอย่าง

จงหาจำนวนรูปแบบในการจัดเรียงสับเปลี่ยนของคำว่า **"MATHEMATICS"**

วิธีทำ

M มีจำนวน ตัวอักษร

A มีจำนวน ตัวอักษร

T มีจำนวน ตัวอักษร

H, E, I,C, S มีจำนวนตัวอักษรละ ตัวอักษร

จำนวนรูปแบบในการจัดเรียงสับเปลี่ยน = $\frac{n!}{n_1!n_1!\ldots n_r!}$ =

ดังนั้น จำนวนรูปแบบในการจัดเรียงสับเปลี่ยนคำว่า **"MATHEMATICS"** มีค่าเป็น

วิธี

การจัดหมู่

ถ้ามีวัตถุ **n** ชิ้นที่แตกต่างกันและมีจำนวนเต็ม **r** ซึ่งมีค่า **1 ≤r≤ n** จำนวนวิธีการจัดหมู่(ไม่คำนึงถึงลำดับ) วัตถุ **r** ชิ้นจากวัตถุ **n** ชิ้น จะเท่ากับ

$$\mathbf{C(n,r)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!} = \mathbf{C(n,n-r)}$$

ตัวอย่าง

กำหนด เซต **S = {1,2,3,4,5}** จงหาจำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของสมาชิก **2** ตัวของเซต **S**

วิธีทำ

n คือจำนวนสมาชิกทั้งหมด ตัว

r คือ จำนวนสมาชิกเพื่อการจัดหมู่ ตัว

C(n,r) = C(5,2) = =

ดังนั้น จำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของสมาชิก **2** ตัวของเซต **S** มีค่า แบบ

ตัวอย่าง

ก) ไพ่หนึ่งสำรับ ประกอบด้วยไพ่ **52** ใบที่แตกต่างกัน จงหาจำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของไพ่ **5** ใบ

ข) ไพ่หนึ่งสำรับ ประกอบด้วยไพ่ **52** ใบที่แตกต่างกัน จงหาจำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของไพ่ **47** ใบ

วิธีทำ

ก) C(n,r) = แบบ

ข) C(n,r) = แบบ

ดังนั้น จำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของไพ่ **5** ใบ หรือ จำนวนการจัดหมู่ทั้งหมดของไพ่ **47** ใบ มีค่า **2,598,960** แบบ

สัมประสิทธิ์ทวินาม

พิจารณาโพลิโนเมียลที่ประกอบด้วย **2** ตัวแปร **x** และ **y**

$$(x+y)^n = (x+y)\,(x+y)\,\ldots\,(x+y)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j x^{n-j} y^j$$

$$= C(n,0)x^n y^0 + C(n,1)\,x^{n-1}y^1 + C(n,2)\,x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n,n)x^0 y^n$$

หมายเหตุ $\sum_{j=0}^{n} C(n,j) = 2^n$

7.6 เอกลักษณ์ปาสคาล (Pascal's Identity)

ทฤษฎีบท เอกลักษณ์ปาสคาล สำหรับทุกพจน์จำนวนเต็ม $n \geq 0$ และทุก จำนวนเต็ม **r** ซึ่งอยู่ระหว่าง $0 \leq r \leq n+1$

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$

$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$

$$\cdots$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

$\cdots$

ตัวอย่าง

จงหาโพลิโนเมียล ของ $(x+2)^6$

วิธีทำ

$(x+2)^6 = (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$

$$= \sum_{j=0}^{6} c_j x^{6-j} 2^j$$

=

=

ดังนั้น โพลิโนเมียล ของ $(x+2)^6$ คือ $x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

ตัวอย่าง

จงกระจาย $(a - b)^7$

วิธีทำ $(a - b)^7 = (a + (-b))^7$

$$= \sum_{j=0}^{7} c_j a^{7-j}(-b)^j$$

=

=

ดังนั้น ผลการกระจาย $(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

ตัวอย่าง จงหา พจน์ที่ **9** ของการกระจาย $(x + a)^{12}$

วิธีทำ พจน์ที่ **9** ของการกระจาย $(x + a)^{12}$ =

=

ดังนั้น พจน์ที่ **9** ของ $(x + a)^{12}$ คือ $495\, x^4a^8$

ตัวอย่าง จงหา พจน์ที่ **4** ของการกระจาย $(x^2 - y^2)^{11}$

วิธีทำ พจน์ที่ **4** ของการกระจาย $(x^2 - y^2)^{11}$ =

=

ดังนั้น พจน์ที่ **4** ของ $(x^2 - y^2)^{11}$ คือ $-165x^{16}y^6$

การเรียงสับเปลี่ยนแบบเลือกสมาชิกซ้ำ

สำหรับจำนวนเต็ม $\mathbf{n, n_1, n_1, n_2,\ldots, n_k \geq 0}$ ซึ่ง $\mathbf{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$ จะได้

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

สำหรับทุก $\mathbf{n \geq 0}$ และ ทุก $\mathbf{k \geq 1}$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq n_1, n_2, \ldots n_k \leq n \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n1} x_2^{n2} \ldots x_k^{nk}$$

ตัวอย่าง

จงหาจำนวนคำตอบทั้งหมดในการแบ่งเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน **n** สมาชิก หากต้องแบ่งสมาชิกทั้งหมดไปอยู่ใน **K** กล่องที่แตกต่างกัน โดยกล่องใบที่ **1** มีสมาชิก $\mathbf{n_1}$ สมาชิก กล่องใบมีสมาชิก $\mathbf{n_2}$ สมาชิก กล่องใบที่ **k** มีสมาชิก $\mathbf{n_k}$ สมาชิก

วิธีทำ

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

นั่นคือ จำนวนคำตอบทั้งหมดเป็น $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

การจัดหมู่แบบเลือกสมาชิกซ้ำ

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $\mathbf{n, r \geq 1}$ จำนวนการจัดกลุ่ม **r** สมาชิกจากสมาชิกทั้งหมด **n** สมาชิกมีค่าเป็น

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

ตัวอย่าง

จงหาจำนวนคำตอบทั้งหมดที่ทำให้สมการ $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 = 11}$ เป็นจริง เมื่อ $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ และ $\mathbf{x_3}$ เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

วิธีทำ

จากบริบทของคำถาม จะได้ว่า

n = 11 และ **r = 3**

จำนวนคำตอบทั้งหมดในการจัดกลุ่มโดยเลือกสมาชิกซ้ำได้เป็น

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

$$\binom{11+3-1}{2} = \binom{11+3-1}{11}$$

$$\binom{13}{2} = \binom{13}{11}$$

ดังนั้นจำนวนคำตอบทั้งหมดในการจัดกลุ่มโดยเลือกสมาชิกซ้ำได้เป็น $\binom{13}{2} = \binom{13}{11} = 78$