ทฤษฎีกราฟ

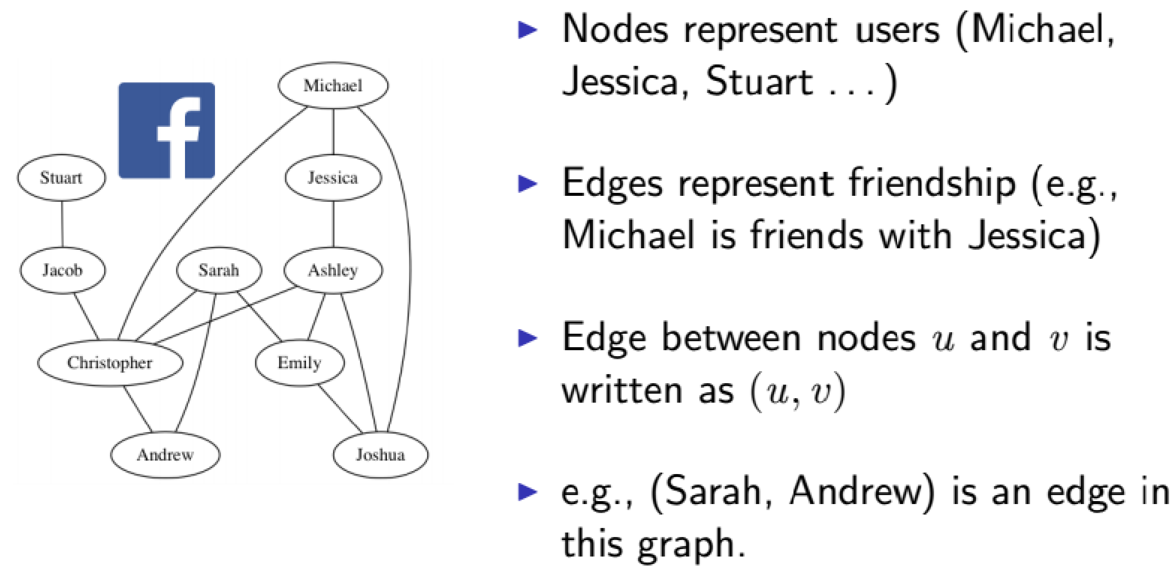
9.1 ทฤษฎีกราฟ

กราฟเป็นพื้นฐานโครงสร้างคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับวิทยาการคอมพิวเตอร์

นิยาม กราฟ G(V,E) ประกอบด้วยเซตของจุด **V** และ เซตของเส้น **E** ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดสองจุด

ทฤษฎีกราฟ นำไปประยุกต์ใช้ **web search, network, database, artificial intelligent** เป็นต้น

ตัวอย่าง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีกราฟ



รูปที่ 1 แสดงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีกราฟ

ศัพท์ที่ควรรู้เกี่ยวกับกราฟ
จุดสองจุด **U** และ **V**เชื่อมต่อกันด้วยด้าน **E** จุดทั้งสองเป็น**จุดประชิด** (adjacent)
ด้าน **(U,V) เชื่อมต่อ** (incident) จุด **U** และ **V**

ดีกรีของจุด V เขียนแทนด้วย **deg(V)** แทนจำนวนด้านทั้งหมดที่เชื่อมต่อกับจุด **V**

เซต**เพื่อนบ้านของจุด V** (**neighborhood**) หมายถึง เซตที่ประกอบด้วยจุดที่ประชิดกับจุด **V**

หมายเหตุ กราฟที่มี ลูป (**loop**) เกิดจากการที่มีจุดใดๆในกราฟประชิดกับตนเอง

นิยาม Simple Graph หมายถึง กราฟที่ไม่มีลูปและมีอย่างมากเพียง **1** ด้านเชื่อมระหว่าง **2** จุดใดๆในกราฟ

นิยาม Multi Graph หมายถึง กราฟที่มีด้านมากกว่าหรือเท่ากับสองด้านเชื่อมต่อจุด **2** จุดใดๆในกราฟ

นิยาม Directed Graph หมายถึง กราฟที่ประกอบขึ้นจากด้านที่มีทิศทาง **(directed edge)** คู่ลำดับ **(u,v)** หมายถึง ด้านที่มีทิศพุ่งจากจุด **u** ไป สิ้นสุดที่จุด **v**

หมายเหตุ สำหรับกราฟที่ไม่มีทิศางใดๆ ด้าน **(u,v) = (v,u)**

ทฤษฎี Handshaking

กำหนด กราฟ **G = (V,E)** เป็นกราฟที่มี **m** ด้าน จะได้ว่า

$$\sum_{v \in V} dev(v) = 2m$$

นิยาม in-degree และ **out-degree** ของ **directed graph**

--in-degree ของจุด **v** เขียนแทนด้วย **deg⁻ (v)** แทนจำนวนของด้านที่ออกจากจุด **v**

-- out-degree ของจุด **v** เขียนแทนด้วย **deg⁺ (v)** แทนจำนวนของด้านที่เข้าสู่จุด **v**

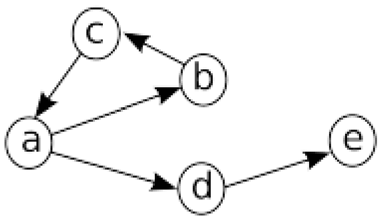
Handshaking สำหรับ **Directed Graph**

กำหนด **G(V,E)** แทน **Directed graph**

$$\sum_{v \in V} dev^{-}(v) = \sum_{v \in V} dev^{+}(v) = |E|$$

ตัวอย่าง

จาก กราฟที่กำหนดให้



จงหา **deg$^-$ (a)** และ **deg$^+$ (a)**

วิธีทำ

deg$^-$ (a) แทนจำนวนของด้านที่ออกจากจุด **a**

deg$^-$ (a) = 2

deg$^+$ (a) แทนจำนวนของด้านที่เข้าสู่จุด **a**

deg$^+$ (a) = 1

9.2 ชนิดของกราฟ

นิยาม Subgraph

กราฟ **G(V,E)** เป็นสับกราฟของ กราฟ **G'(V',E')** ถ้า **V** $\subseteq$ **V'** และ **E** $\subseteq$ **E'**

กราฟ **G(V,E)** เป็นสับกราฟแท้ของกราฟ **G'** ถ้า **G** $\neq$ **G'**

นิยาม Complete Graph (K_n)

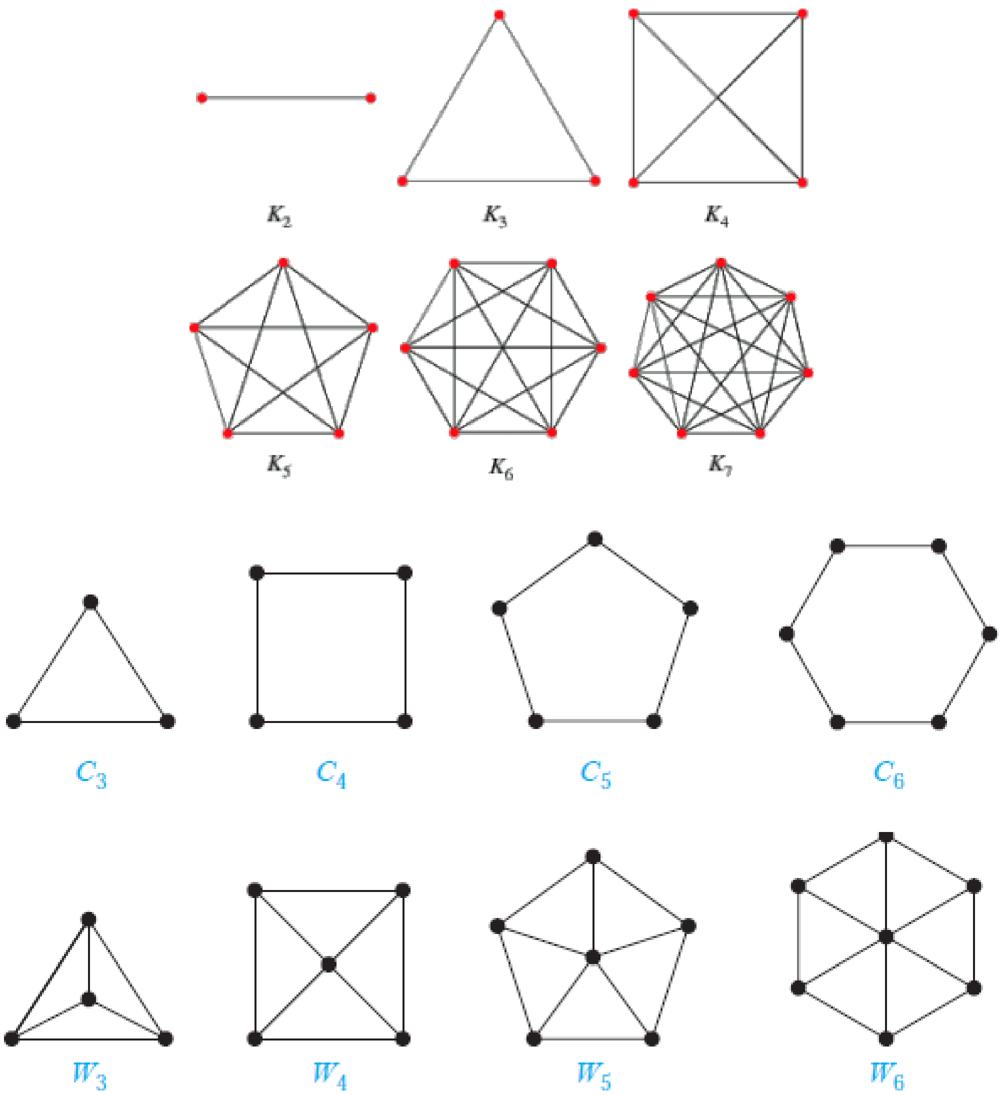
Complete Graph คือ simple undirected graph ซึ่งทุกคู่ของจุดถูกเชื่อมเป็นด้าน

นิยาม Cycle Graph (C_n)

Cycle Graph คือ **simple undirected graph** ซึ่งมีด้านเชื่อมระหว่างจุดที่อยู่ถัดไปในทิศตามเข็มนาฬิกา (หรือทวนเข็มนาฬิกา) อย่างใดอย่างหนึ่ง จำนวนจุด **n** ≥ 3

นิยาม Wheel Graph (W_n)

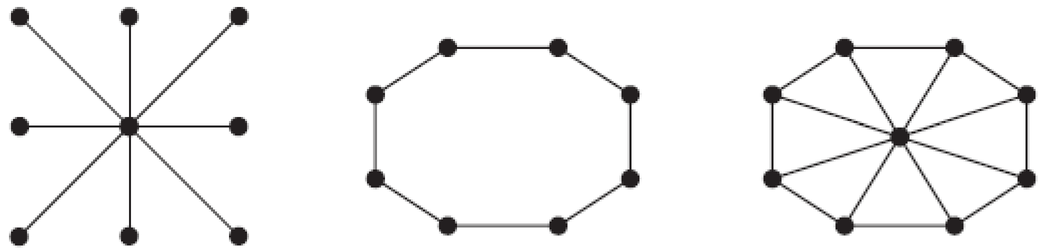
Wheel Graph คือ **simple undirected graph** ที่เป็น **Cycle Graph** ที่เพิ่มจุดหนึ่งจุดเพื่อเชื่อมไปยัง **n** จุดของกราฟ C_n



รูปที่ 2 แสดงกราฟชนิดต่างๆ

ตัวอย่าง การประยุกต์ใช้ **Graph** ชนิดต่างๆ

สำหรับ เครือข่ายท้องถิ่น



Star **Ring** **Hybridge**

รูปที่ 3 แสดง การประยุกต์ใช้ Graph กับเครือข่าย

สำหรับการประมวลผล

ประมวลผลแบบอนุกรม ประมวลผลแบบ

อนุกรมขนาน

รูปที่ 4 แสดง การประยุกต์ใช้ Graph กับการประมวลผล

ตัวอย่าง

จงหาสูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจุด กับ จำนวนด้านของ **Complete Graph** ขนาด **n** จุดใดๆ

วิธีทำ

|V| = 1 จะได้ **|E| = 0**

|V| = 2 จะได้ |E| = 1

|V| = 3 จะได้ |E| = 3

|V| =4 จะได้ |E| = 6

…

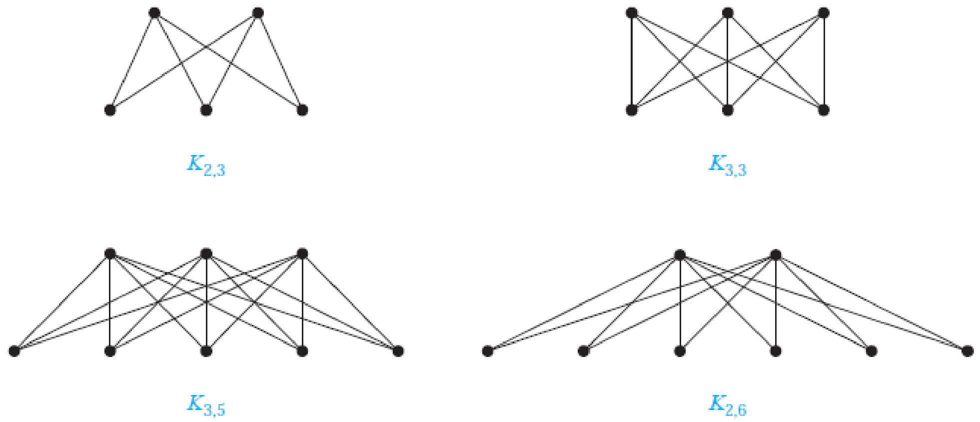
|V| = n จะได้ $|E| = \frac{(n-1)*n}{2}$

นิยาม Bipartite Graph

กำหนด **simple undirected graph G(V,E)** เป็น **Bipartite Graph** ถ้าเซต **V** สามารถถูกแบ่งเป็น **2** เซตที่ **disjoint** กัน V_1 และ V_2 โดยที่แต่ละด้านในเซต **E** เชื่อมจากจุดใดจุดหนึ่งในเซต V_1 ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในเซต V_2

นิยาม Complete Bipartite Graph ($K_{m,n}$)

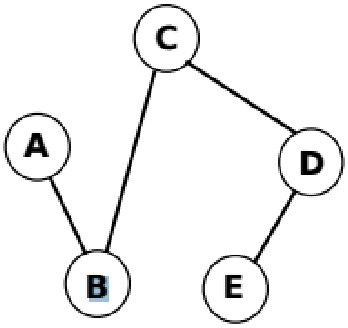
Complete Bipartite Graph G(V,E) คือ กราฟที่แบ่ง เซตของจุด **V** เป็น 2 สับเซต ซึ่งมีจุด **m** และ **n** เป็นสมาชิกในแต่ละสับเซต โดยมีด้านเชื่อมระหว่างจุดจากเซตทั้งสอง



รูปที่ 5 แสดง Complete Bipartite Graph

ตัวอย่าง

จากกราฟ **G(V,E)** ที่กำหนด จงพิจารณาว่าเป็น **Bipartite Graph** หรือไม่ เพราะเหตุใด



วิธีทำ

V = {A, B, C, D, E}

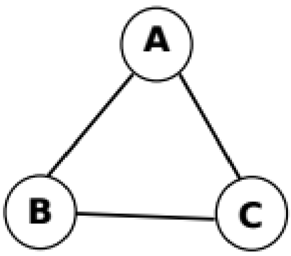
V1 = {A, C, E}

V2 = {B, D}

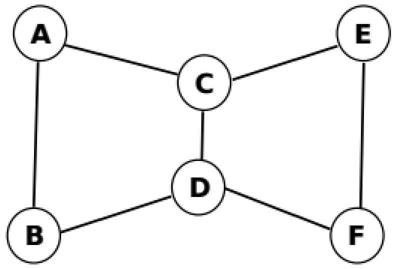
V1 $\cap$ V2 = $\varnothing$ และ แต่ละด้านในเซต **E** เชื่อมจากจุดใดจุดหนึ่งในเซต $\mathbf{V_1}$ ไปยังจุดใดจุดหนึ่งในเซต $\mathbf{V_2}$

ดังนั้น **G(V,E)** เป็น **Bipartite Graph**

ตัวอย่าง Graph ที่ไม่ใช่ **Bipartite Graph**



ตัวอย่าง จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้เป็น **Bipartite Graph** หรือไม่ เพราะเหตุใด

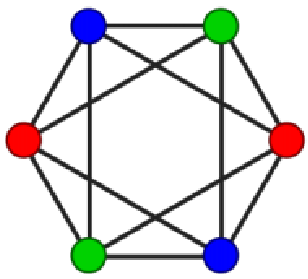


Graph Coloring

นิยาม Graph Coloring หมายถึง การกำหนดสีไปบนจุดของกราฟเพื่อว่าสองจุดใดๆที่ประชิดกันถูกกำหนดให้มีสีที่ต่างกัน

กราฟที่ต้องใช้ **k** สี (**k-colorable**) หากกราฟนั้นได้รับการกำหนดสี **k** สีไปบนจุดทุกจุดในกราฟ

--กราฟ **G(V,E)** เป็น **Bipartite Graph** ก็ต่อเมื่อ กราฟนั้นเป็น **2-colorable**



รูปที่ 6 แสดงการประยุกต์ใช้ Graph Coloring

กราฟข้างต้น ต้องใช้ 3 สี หากมีเพียง 2 สี จะไม่สามารถกำหนดสีให้จุดจุดตามข้อกำหนดของ **Graph Coloring** ได้

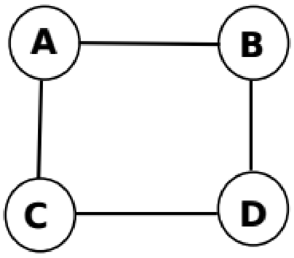
จำนวนสีที่น้อยที่สุดที่จำเป็นต้องใช้ตามหลักการ **Graph Coloring** ถูกเรียกว่า **chromatic number**

นั่นคือ **chromatic number** ของกราฟข้างต้น = **3**

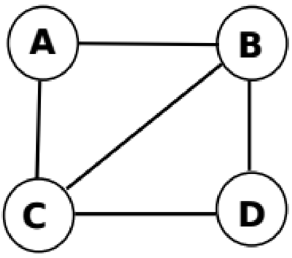
Complete Graph K_n มี chromatic number เป็น n

ตัวอย่าง

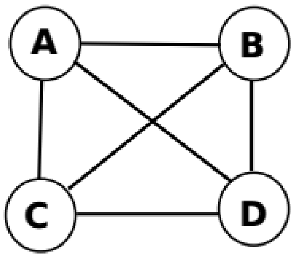
จงหา **chromatic number** ของกราฟ ต่อไปนี้



รูปที่ ก



รูปที่ ข



รูปที่ ค

ตัวอย่าง

กำหนดคณะกรรมการ 6 ชุด ที่ประกอบด้วยสมาชิก

C1 = {Allen, Brooks, Marg}

C2 = {Brooks, Jones, Morton}

C3 = { Allen, Marg, Morton }

C4 = {Jones, Marg, Morton}

C5 = {Allen, Brooks }

C6 = { Brooks , Marg, Morton}

จงประยุกต์ใช้หลักการ **Graph Coloring** เพื่อคำนวณหาว่าจะต้องจัดการประชุมกี่ครั้งเป็นอย่างน้อยเพื่อไม่ให้เกิดการขัดแย้งระหว่างกรรมการแต่ละชุด

9.3 การแทนกราฟ

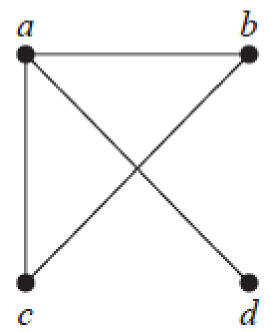
- แบบ **Adjacency Matric**

ให้ **G(V,E)** เป็น **simple graph** ที่มี จำนวนจุด **|V| = n Adjacency Matric** ของกราฟ **G** แทนด้วยเมทริกซ์ 0-1 ที่มีขนาด **nXn** ที่มีค่าเป็น 1 ณ ตำแหน่ง **(i,j)** เมื่อ จุด v_i ประชิดกับจุด v_j และ มีค่าเป็น 0 หากตำแหน่งนั้นไม่มีจุดประชิด

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } \{ v_i, v_j \} \text{ เป็น ด้านของ } G \\ 0 & \end{cases}$$

ตัวอย่าง

จงหา **Adjacency Matric** ของ กราฟ ต่อไปนี้



วิธีทำ

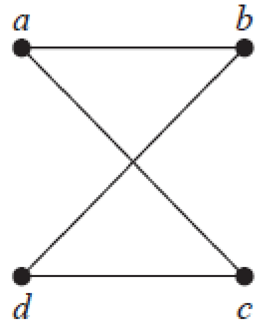
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ตัวอย่าง

จงหา กราฟ ของ **Adjacency Matric**

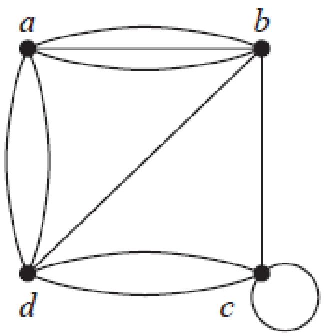
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ



ตัวอย่าง

จงหา **Adjacency Matric** ของ กราฟ ต่อไปนี้



วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- แบบ **Incidence Matric**

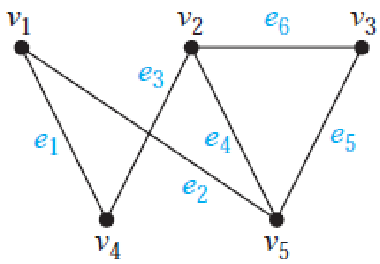
ให้ **G(V,E)** เป็น **undirected graph** ที่ประกอบด้วย จำนวนจุด **|V| = n** และจำนวนด้าน **|E| = m**

Incidence Matric ของกราฟ **G** แทนด้วยเมทริกซ์ที่มีขนาด **nXm M = [m_{ij}]** เมื่อ

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{ถ้า } e_j \text{ เป็นด้านเชื่อมของจุด } v_i \end{cases}$$

ตัวอย่าง

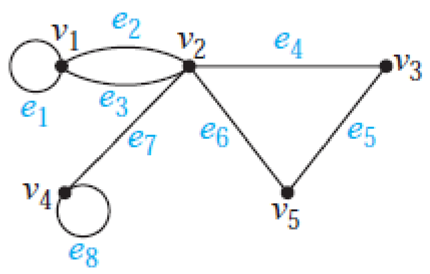
จงหา **Incidence Matric** ของ กราฟ ต่อไปนี้



วิธีทำ

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

ตัวอย่าง จงหา **Incidence Matric** ของ กราฟ ต่อไปนี้



วิธีทำ

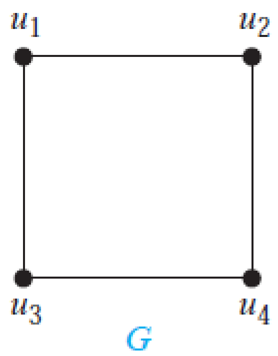
$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

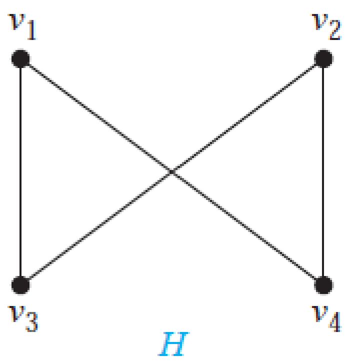
9.4 Isomorphism Graph

กำหนด **simple graph G1(V_1,E_1)** และ **simple graph G2(V_2,E_2)** เป็น **Isomorphism Graph** ถ้ามี function 1-1 และ ทั่วถึง จาก เซต **V_1** ไป **V_2** ซึ่งมีคุณสมบัติ จุด **a** ประชิดจุด **b** บน **G_1** และ มีจุด **f(a)** ประชิดจุด **f(b)** บน **G_2** จะเรียก **function** นั้นว่าเป็น **Isomorphism function** หากกราฟทั้งสองไม่มีคุณสมบัติข้างต้นจะเป็น **Non isomorphism Graph**

ตัวอย่าง

จงแสดงว่ากราฟ **G** และ **H** ต่อไปนี้ เป็น **Isomorphism Graph**





วิธีทำ

$\mathbf{f(u_1) = v_1}$

$\mathbf{f(u_2) = v_4}$

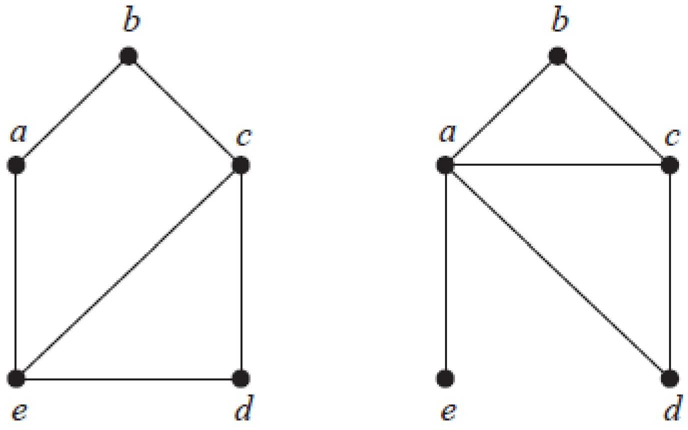
$\mathbf{f(u_3) = v_3}$

$\mathbf{f(u_4) = v_2}$

f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง จากเซต $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ ไปยังเซต $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

ตัวอย่าง

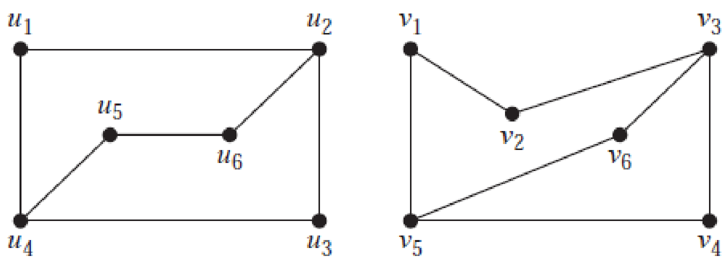
จงแสดงว่า กราฟ **G** และ **H** ต่อไปนี้ เป็น **Nonisomorphism Graph**



G H

ตัวอย่าง

จงแสดงว่ากราฟ **G** และ **H** ต่อไปนี้ เป็น **Isomorphism Graph**



G H

วิธีทำ Adjacency Matric ของกราฟ **G** คือ

$$
\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array},
$$

Adjacency Matric ของกราฟ **H** คือ

$$
\mathbf{A}_H = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

ดังนั้น กราฟ **G** และ **H** เป็น **Isomorphism Graph กัน**