

ต้นไม้ (Tree)

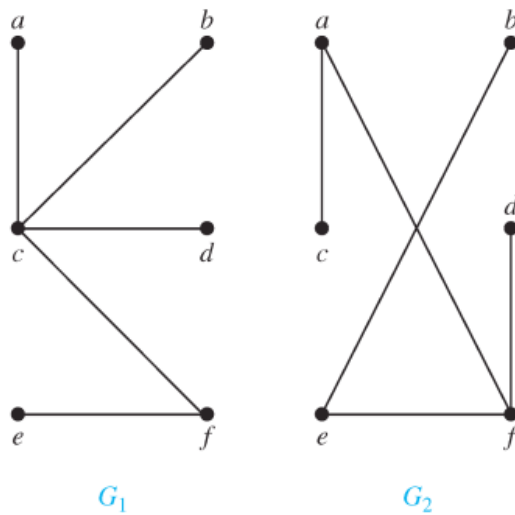
10.1 ต้นไม้ (Tree)

ทรี T เป็น *connected undirected simple graph* ที่ไม่มี *cycle* (จุดจบวนกลับมาที่จุดเริ่มต้น)

ป่า (forest) ประกอบขึ้นจาก ทรี $T \geq 1$

ตัวอย่าง

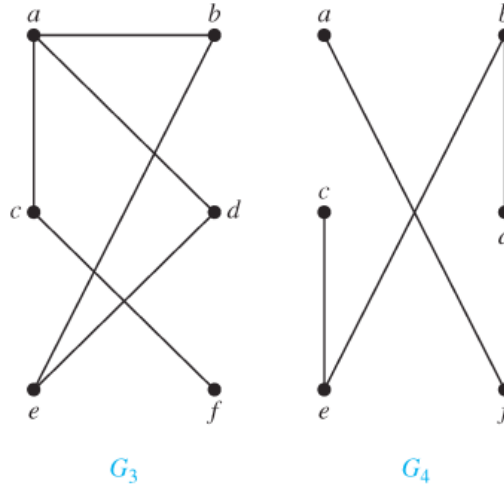
กราฟที่เป็น ทรี



รูปที่ 1 แสดงกราฟที่เป็นทรี

ตัวอย่าง

กราฟที่ไม่ใช่ทรี



รูปที่ 2 แสดงกราฟที่ไม่เป็นทรี

ข้อสังเกต

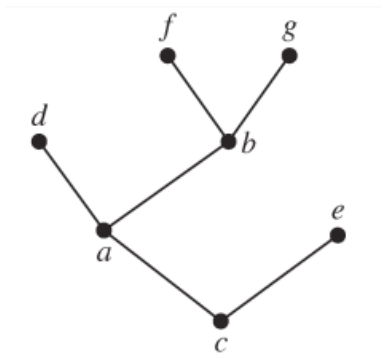
1. กราฟ G เป็น ทรี ก็ต่อเมื่อ มี path ระหว่างจุด 2 จุด ใดๆ ในกราฟ G
2. ทรี T ประกอบด้วย n จุด และ $n-1$ ด้าน
3. ทรี $T = (V,E)$ ซึ่งมี จำนวนจุด $|V| \geq 2$ มีจุดอย่างน้อยที่สุด 2 จุด ที่มี ดีกรีเป็น 1

นิยาม **Rooted Tree** แทนด้วย (T, r) ซึ่งประกอบด้วย $T = (V,E)$ และ $r \in V$ ซึ่งถูกเลือกเป็นราก (root) ของทรี

ข้อสังเกต

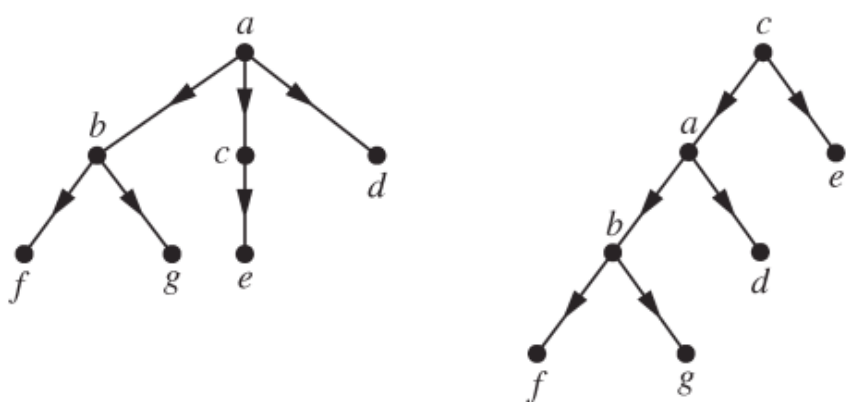
ด้านของทรีที่ได้รับการกำหนดราก r แล้ว จะเสมือนถูกกำหนดทิศทางจาก r ไปยัง จุด v นั้นๆ

ตัวอย่าง



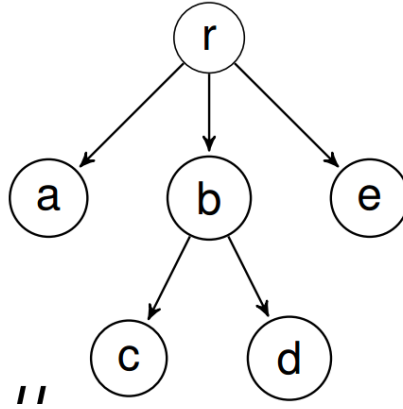
รูปที่ 3 แสดง Rooted Tree (T,c)

ตัวอย่าง



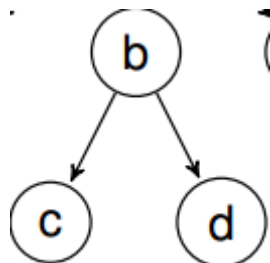
ศัพท์ที่ควรรู้เกี่ยวกับทรี

กำหนด rooted tree (T,r) ที่มี r เป็นราก ดังภาพ



รูปที่ 4 แสดง Rooted Tree (T,r)

1. สำหรับ จุด $v \neq r$ โหนด พ่อ-แม่ (parent) u ที่ก่อให้เกิดด้าน $(u, v) \in E$ จะเรียกจุด v ว่าเป็น โหนดลูก (child) ของ u และเรียกจุดสองจุดใดๆที่มี โหนดพ่อ-แม่ร่วมกันว่าโหนดญาติ (siblings)
2. โหนด ใบ (leaf) คือ โหนดที่ไม่มีโหนดลูก และ เรียก โหนดที่อยู่ถัดจากโหนดลูกว่า โหนด ภายใน (internal vertices)
3. ความสูง (height) ของทรี วัดจากเส้นทางที่ยาวที่สุด จาก ราก ไป ยังใบ ของทรีต้นนั้นๆ
4. บรรพบุรุษ (ancestors) ของโหนด v คือทุกโหนด u ที่ไม่ใช่ v ($u \neq v$) ซึ่งมีทิศจาก u ไป v
5. ลูกหลาน (descendants) ของโหนด v คือทุกโหนด u ที่ไม่ใช่ v ($u \neq v$) ซึ่งมีทิศจาก v ไป u
6. ชับทรี (subtree) ที่ได้รับการกำหนดให้ รากเป็น จุด v และ โหนดลูกหลานของ v



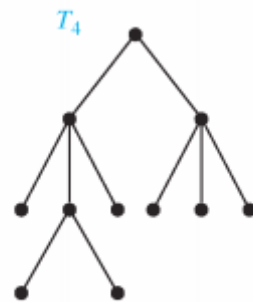
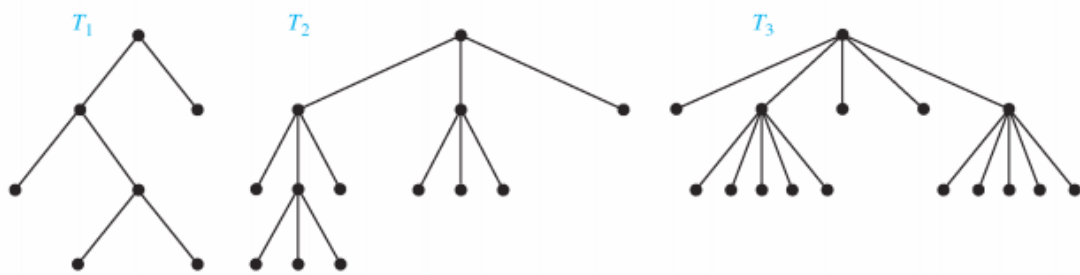
รูปที่ 5 แสดง Subtree ของ Tree (T,r)

10.2 ชนิดของทรี

m-ary Trees

นิยาม m-ary Trees สำหรับ $m \geq 1$ จะเรียก rooted tree ว่าเป็น m-ary tree ถ้าทุกโหนดภายใน (internal nodes) มีลูกอย่างมากที่สุด m จำนวน

และ จะเป็น full m-ary tree ถ้าทุกโหนดภายใน (internal node) มีลูกเป็น m จำนวน



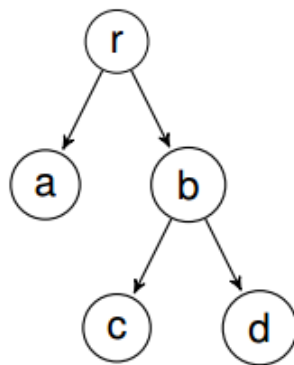
รูปที่ 6 แสดง m-ary Trees

Rooted ordered tree

นิยาม rooted ordered tree เป็น rooted tree (T,r) ซึ่ง ลูกของแต่ละโหนดภายใน (internal vertex) v ใดๆ ถูกจัดเรียงในลักษณะลำดับเชิงเส้น $\leq v$

หมายเหตุ ทรีมักจะจัดเรียงค่าน้อยอยู่ในโหนดทางซ้ายและค่ามากอยู่ในโหนดทางขวา

หาก rooted ordered tree เป็น binary tree โหนดทางซ้ายถูกเรียกว่า *left child* โหนดทางขวาถูกเรียกว่า *right child*



รูปที่ 7 แสดง rooted ordered tree

ทฤษฎีบท สำหรับทุก $m \geq 1$ ทุก full m -ary tree ซึ่งมีจำนวน i โหนดภายใน จะมีจำนวนจุดทั้งสิ้น

$$n = mXi + 1 \text{ จุด}$$

ทฤษฎีบท สำหรับทุก $m \geq 1$ full m -ary tree ใดๆ ซึ่งมี n โหนด จะมีโหนดภายใน $i = (n-1)/m$ จำนวน และมี leaf $l = [(mn-n)+1]/m$ จำนวน

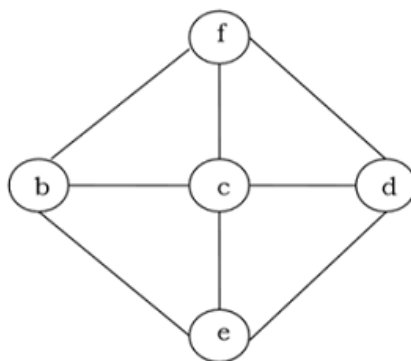
Spanning Trees

สำหรับ simple undirected graph G ใดๆ Spanning Tree ของ กราฟ G เป็นสับกราฟ T ของ G ซึ่ง ทรี T ประกอบด้วยทุกจุดของกราฟ G

ทฤษฎีบท ทุก connected graph G ใดๆ จะมี spanning tree

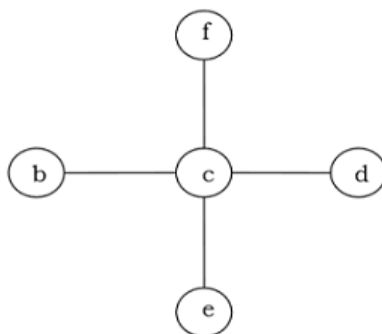
ตัวอย่าง

จาก simple undirected graph G ที่กำหนดให้ จงหา spanning tree



วิธีทำ

Spanning Tree ของ กราฟ G เป็นสับกราฟ T ของ G ซึ่ง ทรี T ประกอบด้วยทุกจุดของ กราฟ G ที่ไม่มี cycle



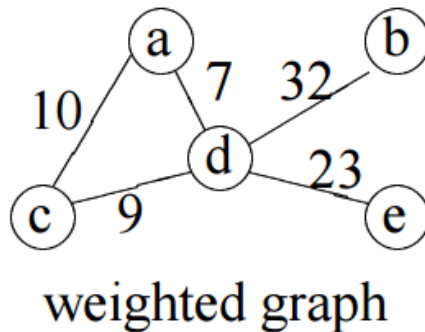
10.3 Minimal Spanning Tree

Minimal Spanning Tree

นิยาม **Minimal Spanning Tree** เป็น undirected connected graph G ที่มีค่าน้ำหนักกำกับ อยู่บนด้านของกราฟ G โดยจะให้ผลรวมของค่าน้ำหนักของ ทริน้อยที่สุด

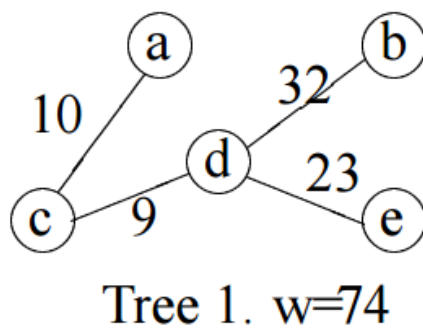
ตัวอย่าง

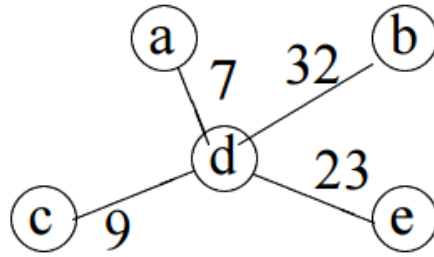
จงหา minimal spanning จากกราฟที่กำหนด



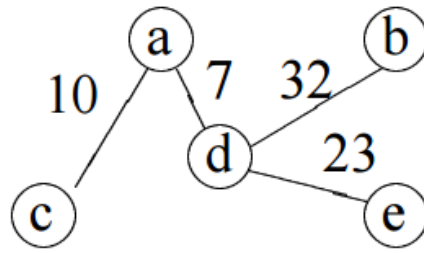
วิธีทำ

Spanning Tree ที่เป็นไปได้ทั้งหมด





Tree 2, $w=71$

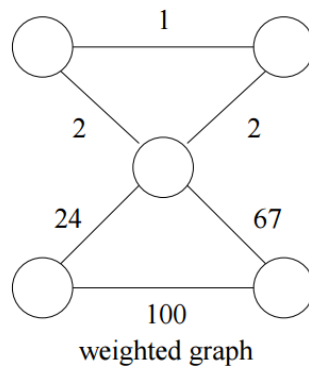


Tree 3, $w=72$

ดังนั้น minimal spanning tree คือ Tree 2 มี weigh รวมที่น้อยที่สุด = 71

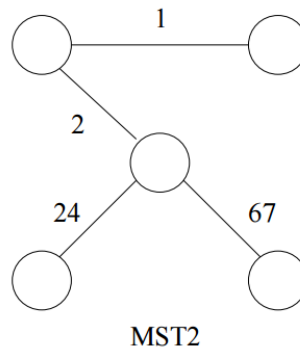
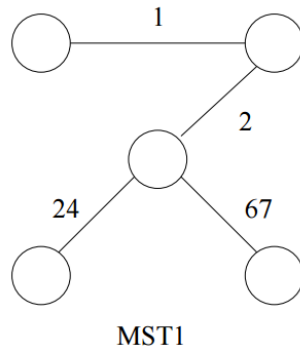
ตัวอย่าง

จงหา **minimal spanning** จากกราฟที่กำหนด



วิธีทำ

Spanning Tree ที่เป็นไปได้ทั้งหมด



ดังนั้น minimal spanning tree คือ MST1 และ MST2 มี weigh รวมที่น้อยที่สุด =
 $1+2+24+67 = 94$

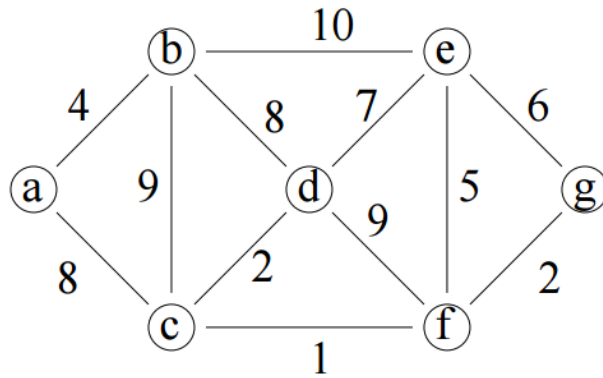
Prim's algorithm

ขั้นตอนวิธีในการหา **minimal spanning tree** ตามขั้นตอนวิธีของ **Prim**

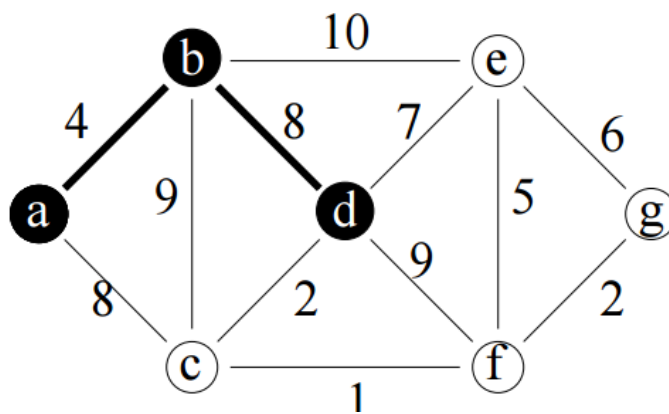
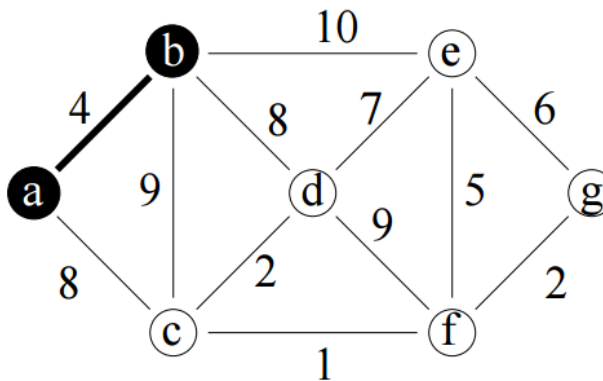
- 1, เลือกจุด r ที่เป็น **root** ของ **spanning tree** โดยกำหนด $S = \{r\}$ และ $A = \{\}$
2. เลือกด้านที่มี **weigh** น้อยที่สุดที่เชื่อมกับจุดใดจุดหนึ่งใน เซต S แล้วนำจุดปลายของด้านที่เลือกเพิ่มในเซต S และเพิ่มด้านที่เลือกในเซต A
3. ทำขั้นตอนที่ 2 ซ้ำ จนกว่าจุดทุกจุดได้รับการเลือก

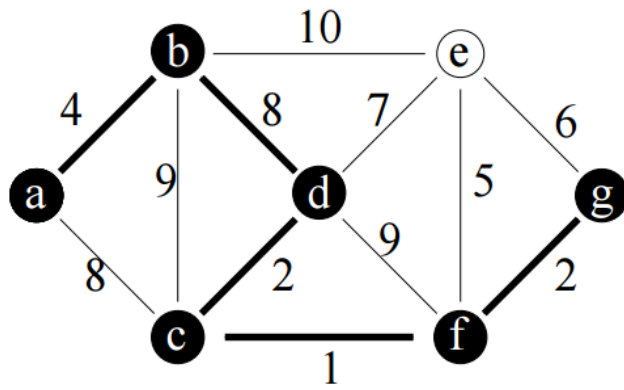
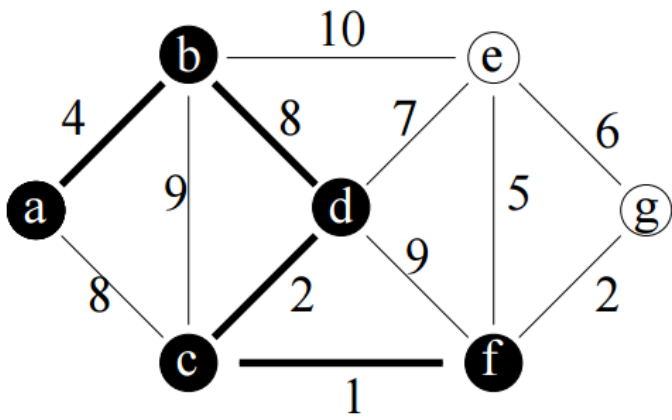
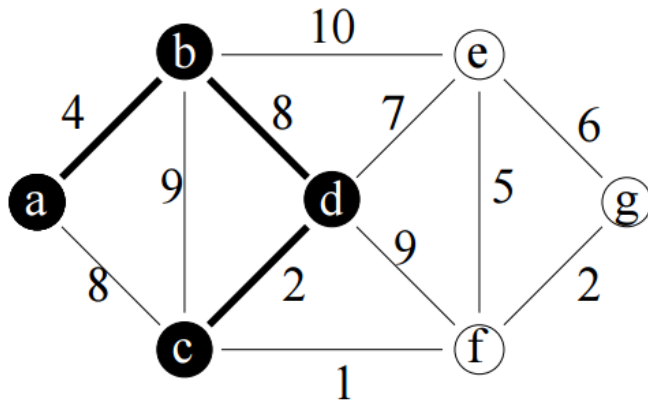
ตัวอย่าง จาก **undirected connected weighed graph G** ที่กำหนดให้

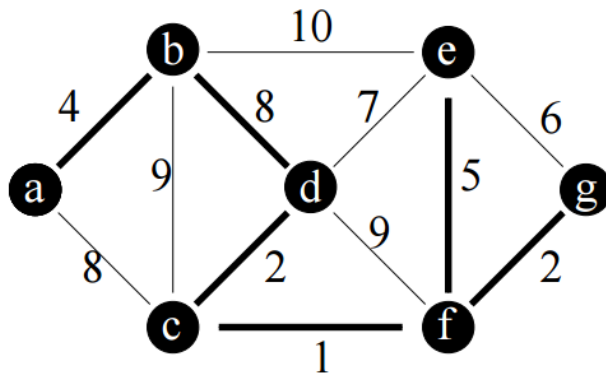
จงหา **minimal spanning tree** โดยขั้นตอนวิธี **Prim**



วิธีทำ







ดังนั้น **minimal spanning tree** โดยขั้นตอนวิธี **Prim** มีค่าเท่ากับ **28** หน่วย